

Partea I

ANALIZA COMPARATIVĂ A DATELOR DIN LITERATURĂ

ANALIZA DATELOR DIN LITERATURA SI ANALIZA POZITIEI ECONOFIZICII, CA DOMENIU INTERDISCIPLINAR, ÎNTRE FIZICA SI ECONOMIE.

Cercetarea teoretică și empirică privind deciziile economice, organizarea, comportarea și schimbarea economico-socială sub toate aspectele permite îmbunătățirea înțelegerii asupra modalităților în care cunoașterea umană (cognitivă, informațională și analitică) influențează activitatea structurilor economice și sociale la scară micro și macro-comportamentală. În cadrul acestor eforturi, înțelegerea relațiilor de graniță dintre economic-social și celelalte științe (fizică, matematică, biologie, fiziologie, psihologie, drept, antropologie, sociologie, etc...) joacă un rol deosebit de important astăzi, când tendințele de globalizare se resimt nu numai în domeniul schimbului economic și informațional ci și în acela al științelor „fundamentale”. Printre aceste eforturi relația dintre fizică și economie-social a devenit privilegiată, a fost definită chiar o nouă ramură de cercetare **econo-fizica**, care abordează analiza fenomenelor economice din prisma teoretică a fizicienilor [1]. La fel ca și economiștii, fizicienii văd în economie o colecție de unități complexe, în interacțiune, în care orice depinde de orice. Modul în care se realizează această dependență este analizat de fizicieni ca fiind sub ordinea unor legi robuste, empirice, care descriu și ne permit să înțelegem aceste interacțiuni complexe.

Piețele financiare sunt sisteme cu un mare număr de comercianți care interacționează unii cu alții și reacționează la informațiile externe cu scopul de a determina cel mai bun preț pentru un anumit obiect. Bunurile pot fi foarte diferite ca animale, minereuri, acțiuni, valute sau titluri – sau alte produse derivate aflate la baza celorlalte tipuri de produse. Unele piețe financiare sunt localizate în anumite orașe pe când altele (ca piețele de schimb monetar – valutar) sunt delocalizate și accesibile oriunde în lume. Atunci când analizăm seria temporală a evoluției în timp a unui preț, a volumului sau numărului de tranzacții a unui produs financiar, putem observa că aceste evoluții temporale sunt impredictibile. O importantă serie temporală, ca cea a prețului unui bun financiar, este indistinctibilă determinată de un proces stohastic.

Scurt istoric

Anii „'70” prezintă o serie semnificativă de schimbări în lumea finanțelor [1]. Un an cheie al schimbărilor care vor apărea în teoria domeniului a fost anul 1973, când monedele au început să fie comercializate pe piețele financiare (valorile lor determinate de piețele de schimb - o piață activă 24 ore pe zi pe tot globul) și în același an, Black și Scholes [2] publică prima lucrare ce prezintă o formulă rațională de preț al opțiunilor. Volumul pieței schimburilor valutare externe a crescut de atunci cu o rată impresionantă. Volumul tranzacționat în anii „'90” a fost de zeci de ori mai mare decât cel din „'70”. O creștere și mai spectaculoasă a avut loc în domeniul produselor financiare derivate. Astăzi, piețele financiare facilitează schimbul unor imense cantități de bani, produse, și bunuri într-un mediu competitiv globalizat. Un alt an crucial a fost anul 1980 când tranzacțiile electronice, deja o parte a consistenței a mediului schimburilor majore de stocuri, a fost adaptată la piața schimbului monetar internațional. Stocarea electronică a datelor referitoare la contracte – sau la prețurile la care comercianții vor să cumpere sau să vândă un produs financiar – a avut loc cam în același timp cu răspândirea largă a comerțului electronic. Un rezultat este că astăzi o cantitate imensă de date financiare stocate electronic este într-adevăr disponibilă. Aceste date sunt caracterizate de proprietatea de a fi date de mare frecvență – timpul mediu dintre două înregistrări poate fi de ordinul secundelor. Enormă extindere a pieței financiare necesită investiții puternice, în bani și resurse umane, pentru a avea informații de încredere și pentru a minimiza riscul instituțiilor financiare implicate.

Cercetările de pionerat

În ultimii treizeci de ani fizicienii au avut rezultate importante în domeniile tranzițiilor de fază, mecanicii statistice, dinamicii neliniare și a sistemelor dezordonate. În aceste domenii distribuția de tip putere, scalarea și serii temporale impredictibile (stohastice sau deterministice) sunt prezente și interpretările curente ale fizicii actuale sunt obținute adesea folosind aceste concepte. Cu toate acestea folosirea pentru prima dată a unei distribuții de tip putere – și prima formalizare matematică a unui drum aleatoriu – a avut loc în științele sociale. Acum aproape 100 ani, economistul italian Pareto, investigând caracteristicile statistice ale distribuției bogăției indivizilor într-o economie stabilă a modelat-o folosind distribuția putere

(cu coeficient negativ pe care la estimat ca fiind 1.5 [3]). Pareto nota că rezultatul său este general și aplicabil la toate tipurile de colectivitate umană.

Conceptul de distribuție de tip putere este contra-intuitiv, deoarece poate lipsii sistemul de orice caracteristică de scală. Acest fapt a împiedicat folosirea distribuției de tip putere în științele exacte până când în teoria probabilităților (datorită muncii lui Lévy [4] și datorită aplicațiilor distribuției de tip putere la câteva probleme urmărite de Mandelbrot [5]) și în studiul tranzițiilor de fază (care introduce conceptul de scalare pentru funcțiile termodinamice și funcțiile de corelație [6]) a căpătat o nouă dimensiune. Un alt concept omniprezent în științele exacte este acela al drumurilor aleatoare. Prima descriere teoretică a unui drum aleatoriu în științele exacte a fost realizată de Einstein în 1905 [7] în faimosul articol privind determinarea numărului lui Avogadro. În anii următori matematica drumului aleatoriu a fost făcută mai riguros de către Wiener [8]. Acum conceptul de drum aleator s-a răspândit în aproape toate ramurile de cercetare ale științelor exacte.

Prima formalizare a unui drum aleator nu a fost totuși publicată de Einstein, ci într-o teză de doctorat a lui Bachelier [9]. Îndrumătorul său a fost Poincaré, unul dintre cei mai mari matematicieni ai timpului său. Teza este surprinzătoare în câteva aspecte. Operează cu prețurile acțiunilor pe piața speculativă, o activitate care astăzi este extrem de importantă pe piețele financiare unde produsele derivate – ale căror valori depind de acelea ale unor variabile aflate mai la baza sistemului – sunt astăzi tranzacționate în diferite feluri. Pentru a realiza acest lucru, Bachelier a determinat probabilitățile schimbărilor de preț scriind ceea ce astăzi se numește ecuația Chapman-Kolmogorov și observând că ceea ce numim astăzi un proces Wiener satisface ecuația de difuziune (acest punct a fost redescoperit de Einstein în lucrarea sa din 1905 privind mișcarea Browniană). Analizând retrospectiv, teza lui Bachelier duce lipsă de rigoare în anumite aspecte matematice și economice. În special, determinarea unei distribuții Gaussiene pentru schimbările de preț a fost – matematic – insuficient motivată. Pe latura economică Bachelier investighează schimbările de preț, acolo unde economiștii se confruntă în principal cu schimbări în logaritmul prețului. Oricum, aceste limitări nu diminuează valoarea muncii de pionierat a lui Bachelier. Pentru a vedea munca lui Bachelier în perspectivă menționăm că modelul Black & Scholes al prețului opțiunilor – considerat o piatră de temelie în teoria preț-opțiune – a fost publicată cu aproape trei sferturi de secol după publicarea tezei lui de doctorat. Pe lângă acesta, teoreticienii și practicienii sunt conștienți că modelul Black &

Scholes necesită corecții în aplicare sa, în sensul că problema proceselor stohastice ce descriu schimbările în logaritmul prețului într-o piață financiară este în continuare deschisă.

Problema distribuției schimbărilor de preț a fost reconsiderată de câțiva autori începând din anii 1950, în perioada în care matematicienii au început să arate interes pentru modelarea prețurilor pieței. Propunerea originală a lui Bachelier privind distribuția Gaussienă a distribuțiilor schimbărilor de preț a fost repede înlocuită cu un model în care prețurile stocurilor sunt distribuite logaritmico-normal, adică prețurile stocurilor efectuează o mișcare Browniană. Într-o mișcare Browniană geometrică, diferențele logaritmilor prețurilor sunt distribuite Gaussian. Acest model se știe că furnizează doar o primă aproximație a ceea ce este observat în datele reale. Pentru acest motiv, un număr de alte modele alternative au fost propuse în încercarea de a explica: evidența empirică a faptului că coada distribuțiilor măsurate este mai îngroșată decât cea așteptată pentru mișcarea Browniană și; fluctuațiile temporale ale momentului de ordin doi ale schimbărilor de preț.

Printre modele alternative propuse, una dintre cele mai revoluționare dezvoltări din teoria prețurilor speculative, este ipoteza lui Mandelbrot că prețurile urmează o distribuție stabilă Lévy [10]. Procesele stabile Lévy sunt procese stohastice ce se supun teoremei limitei centrale. Supunându-se unei forme generalizate a teoremei limitei centrale ele au un număr de proprietăți interesante. Ele sunt stabile (ca și procesele Gaussiene obișnuite) – adică suma a două procese stohastice independente caracterizate de aceeași distribuție Lévy de index este ea însăși un proces caracterizat de o distribuție Lévy de același index. Alura distribuției este asigurată de presupunerea variabilelor aleatoare identic Lévy distribuite. Procesele stabile Lévy definesc un bazin de atracție în spațiul funcțional al funcțiilor densitate de probabilitate. Suma unor procese stohastice independente identic distribuite și este caracterizată de o funcție densitate de probabilitate având o coadă de tip lege-putere și va converge, în probabilitate, la un proces stohastic stabil Lévy de același index atunci când numărul proceselor stohastice tinde la infinit [11]. Această proprietate ne spune că distribuția unui proces stohastic stabil Lévy este o distribuție de tip lege-putere pentru valori mari ale variabilei aleatoare. Faptul că distribuțiile de tip lege-putere pot duce lipsă de o scală tipică este reflectat în procesele stabile Lévy de proprietatea că varianța (deviația standard) proceselor stabile Lévy este infinită pentru α mai mic ca 2. Procesele stohastice cu varianță infinită, de altfel bine definite matematic, sunt extrem de greu folosite și, pe lângă acesta, ridică probleme fundamentale atunci când sunt aplicate la sisteme reale. De exemplu, în sistemele fizice momentul de ordin doi este adeseori relaționat cu

temperatura sistemului, așa încât o varianță infinită implică o temperatură infinită (sau nedefinită). În sistemele financiare o varianță infinită ar complica sarcina importantă a estimării riscurilor.

O nouă abordare deterministică – teoria haosului

Larg acceptată în teoria financiară este idea că seriile temporale ale prețurilor bunurilor sunt ne-predictibile. Această credință este piatra de temelie a descrierii dinamicii prețurilor ca un proces stohastic. Încă din anii 1980 s-a recunoscut în fizică faptul că seriile temporale ne-predictibile și procesele stohastice nu sunt sinonime. În mod special, teoria haosului, a arătat că serii temporale ne-predictibile se pot obține și pentru sisteme deterministe neliniare. Rezultatele obținute în studiul sistemelor fizice și biologice a declanșat un interes și asupra studiului sistemelor economice, studii empirice și teoretice au investigat dacă evoluția temporară a prețurilor bunurilor pe piețele financiare poate fi într-adevăr datorată fundamental unei dinamici neliniare deterministe a unui număr (limitat) de variabile.

Unul dintre scopurile cercetătorilor care studiază piața financiară cu uneltele dinamicii neliniare a fost acela de a reconstrui atractorul straniu (ipotetic) prezent în evoluția temporală haotică și în a-i măsura dimensiunea. Reconstrucția atractorului fundamental și a dimensiunii lui nu este o sarcină ușoară. Cea mai probabilă estimare a dimensiunii este aceea că ea este superioară dimensiunii șase. Pentru sisteme haotice de acest tip este mai degrabă dificilă distincția dintre o evoluție haotică temporală sau un proces aleatoriu, în special dacă dinamica neliniară caracteristică este necunoscută. Dintr-un punct de vedere empiric, este puțin probabil să fie posibil să discriminăm între ipoteza aleatoare și cea haotică.

Deoarece nu poate fi legiferat faptul că piețele financiare urmează o dinamică haotică, încă se lucrează cu o paradigmă conform căreia dinamica prețurilor bunurilor este un proces stohastic. Evoluția temporală a prețurilor bunurilor depinde de toate informațiile ce afectează (sau credem că afectează) bunul investigat și pare puțin probabil ca toate aceste informații să poată fi descrise în mod esențial de un număr mic de ecuații neliniare deterministe.

În ultima vreme au apărut însă o serie întreagă de dovezi care analizează gradul de determinism prezent în datele financiare, folosind de exemplu analiza prin „recurrence plot” [12], sau chiar modelări ale unor sisteme microeconomice la care poate fi contolată comportarea haotică [13].

Orientările actuale

Sistemele financiare manifestă proprietăți ce caracterizează sistemele complexe. Ele sunt sisteme deschise în care multe unități interacționează neliniar în prezența unui feedback. Piețele financiare, sunt guvernate de legi mai degrabă stabile și evoluția temporală este monitorizată continuu. Este posibil acum să dezvoltăm modele și să le testăm corectitudinea și puterea predictivă folosind datele disponibile, deoarece există acum baze de date de mari dimensiuni și frecvență.

Una dintre cele mai active zone ale finanțelor este estimarea instrumentelor derivate. În cel mai simplu caz, un bun comercial este descris de un proces stohastic și cererea rezultată este evaluată pe baza tipului de bun comercial și a valorii și proprietăților statistice ale sale. Această problemă prezintă cel puțin două aspecte diferite, aspectul „fundamental” (care este înrudit cu natura procesului aleatoriu al bunului comercial) și aspectul „tehnic” sau „aplicativ” (care este înrudit cu soluția la problema opțiune-preț sub presupunerea că bunul comercial este dependent de procesul aleatoriu propus).

Recent, un număr crescând de fizicieni încercă să analizeze și modeleze piețele financiare și, mai general, sistemele economice. Interesul acestei comunități în sisteme financiare și economice își are rădăcinile datând din 1936, când Majorana a scris o lucrare de pionerat despre analogia esențială dintre legile statistice în fizică și în științele sociale [14]. Acest punct de vedere ne-ortodox a fost considerat de interes marginal până recent. Într-adevăr, înainte de anii 1990, foarte puțini fizicieni profesioniști au făcut cercetări asociate cu sistemele economice. Excepțiile includ Kadanoff [15], Montroll [16] și un grup de fizicieni de la Institutul Santa Fe [17].

Încă din anii 1990, activitatea de cercetare a fizicienilor în acest câmp de activitate a devenit mai puțin episodică și a început să se ivească o comunitate științifică. Noi reviste interdisciplinare au fost publicate, au fost organizate conferințe, și un set de probleme potențial soluționabile au fost previzionar identificate. Activitatea de cercetare a acestui grup de fizicieni este complementară aproape tuturor orientărilor tradiționale din finanțe și finanțele matematice. Una dintre diferențele caracteristicile este aceea că fizicienii pun accentul pe o analiză empirică a datelor economice. O altă diferență este fundamentul teoriilor și metodelor fizicii statistice dezvoltate de-a lungul ultimilor 30 de ani pe care fizicienii le aduc spre dezvoltarea subiectului. Conceptele de scalare, universalitate, sisteme dezordonate limitate, și sisteme cu auto-

organizare pot fi utile în analiza și modelarea sistemelor economice și financiare. Unul dintre argumentele ridicate câteodată împotriva acestui aspect este acela că analiza empirică realizată pe datele economice sau financiare nu este echivalentă cu investigația uzuală experimentală ce are loc în fizică. Cu alte cuvinte, este imposibil să efectuezi experimente la scară mare în economie și finanțe care ar putea să infirme orice teorie dată.

Notăm că aceste limitări nu sunt specifice sistemelor economice și financiare, ele afectează de asemenea bine dezvoltatele domenii ale fizicii ca astrofizica, fizica atmosferică sau geofizica. De aceea, prin analogie cu activitățile în aceste domenii mai elaborate, știm că suntem în stare să testăm și să infirmăm orice teorie asociată cu seturi disponibile de date economice sau financiare furnizate sub forma unor înregistrări ale activității financiare și economice.

Printre domeniile importante al cercetării în fizică care au de-a face cu sisteme economice și financiare, unul se ocupă de caracterizarea completă a proceselor stohastice ale schimbărilor de preț ale bunurilor. Au fost realizate câteva studii privind diferitele aspecte ale analizei proceselor stohastice, de exemplu alura distribuției schimbărilor de preț [18, 19, 20, 21, 22, 23], ale memoriei temporale [24, 25, 26, 27] și ale proprietăților statistice de ordin superior [28, 29, 30]. Această zonă de interes este încă activă, și sunt încercări de dezvoltare a celor mai sofisticate modele stohastice ce să descrie toate comportările întâlnite în analizele empirice. O realizare importantă în această arie este realizarea a unui consens aproape complet privind aspectul finit al momentului secund al schimbării prețurilor. Această problemă a fost una deliberată mult timp, și rezolvarea a venit ca o urmare a interesului revigorat asupra studiilor empirice privind sistemele financiare.

O a doua arie privește dezvoltarea unui model teoretic care să fie în stare să cuprindă toate trăsăturile esențiale ale pieței financiare. Au fost propuse câteva modele [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38-41], și câteva din proprietățile stohastice de bază ale dinamicii prețurilor stocurilor au fost reproduse de aceste modele, ca de exemplu alura ne-Gaussiană de tip coadă largă, leptokurtică, a distribuției diferențelor de preț. Încercări paralele de modelare a piețelor financiare au fost dezvoltate și de economiști [42-44].

Alte arii care prezintă investigații de interes se referă la prețul rațional ale produselor derivate atunci când anumite presupuneri canonice ale modelului Black & Scholes sunt relaxate [45-46] și privind alegerea portofoliului și a optimizării lui dinamice [47, 48, 49, 50, 51]. O arie de cercetare viitoare va considera analogiile și diferențele dintre dinamica prețului

pe piețele financiare și fenomene fizice ca turburența [52, 53-54] și sistemele ecologice [55, 56].

O temă comună întâlnită în aceste cercetări este aceea a corelației temporale a seriilor financiare. Detecția prezenței unor corelații de ordin superior în schimbările prețurilor a motivat schimbarea unor abordări în ceea ce este cunoscut ca „analiză tehnică” [57].

Suplimentar studiilor ce analizează și modelează sistemele financiare, sunt studii privind distribuția veniturilor firmelor și studii statistice privind proprietățile statistice ale ratei lor de creștere [58-59, 60, 61]. Proprietățile statistice ale performanțelor economice ale organizațiilor complexe ca universități sau țări întregi au fost de asemenea investigate [62]. Pentru o privire mai completă, trebuie considerate proceeding-urile unor conferințe dedicate acestui subiect [63, 64]

CONCEPTE CHEIE ALE ȘTIINȚEI ECONOMICE ȘI ABORDAREA LOR DIN PERSPECTIVA FIZICII

Arbitrajul - un concept cheie pentru înțelegerea pieței este conceptul de arbitraj – cumpărarea și vânzarea unui aceluiași produs sau produs echivalent cu scopul de a profita de discrepanțele de preț. Acest tip de oportunitate de arbitraj poate fi observată des pe piețele financiare. Prezența comercianților care caută condiții de arbitraj contribuie la abilitatea pieței de a evolua în modul cel mai rațional privind prețul bunurilor. Pentru a vedea acest fapt să presupunem că cineva a găsit o oportunitate de arbitraj. O va exploata și dacă reușește să facă un profit va repeta aceeași acțiune. După o perioadă de timp, prețurile în ambele locații vor devenii mai „raționale”, și astfel nu vor mai asigura oportunități de arbitraj.

Ipoteza pieței eficiente - Piețele sunt sisteme complexe care incorporează informații despre un anumit produs în seriile temporale ale prețului său. Paradigma cea mai acceptată printre cercetătorii din finanțe este că piața este foarte eficientă în determinarea celui mai rațional preț pentru bunurile tranzacționate. Ipoteza pieței eficiente a fost inițial formulată în anul 1961 [65]. O piață se numește eficientă dacă toate informațiile disponibile sunt procesate instantaneu când ajung la piață și sunt reflectate imediat în noile valori ale prețurilor bunurilor tranzacționate.

Motivația teoretică pentru ipoteza pieței eficiente își are rădăcinile în lucrările de pionierat ale lui Bachelier [66], care la începuturile secolului douăzeci a propus ca prețurile

bunurilor pe o piață speculativă să fie descrise ca procese stohastice. Munca sa a rămas aproape necunoscută până în anii 1950 când rezultate empirice [67] legate de corelațiile seriale ale ratei de întoarcere au arătat faptul că corelațiile pe durate temporale scurte sunt neglijabile și comportarea aproximativă a seriilor temporale este într-adevăr similară cu cea a drumurilor aleatoare ne-corelate. Ipoteza pieței eficiente a fost explicit formulată în anul 1965 de Samuelson [68], care a demonstrat matematic că prețurile anticipate corespunzător fluctuează aleatoriu. Folosind ipoteza comportării raționale și a eficienței pieței, el a putut să demonstreze că valoarea așteptată a prețului unui anumit produs la un anumit moment este legată de valorile anterioare ale prețurilor (procesele stohastice numite martingale). Concluzia acestei forme „ușoare” a ipotezei pieței eficiente este atunci aceea că schimbările de preț sunt impredictibile din seria temporală a acestor schimbări.

Încă din anii 1960, un mare număr de investigații empirice au fost dedicate testării ipotezei pieței eficiente [69]. În marea majoritate a studiilor empirice, corelațiile temporale dintre schimbările de preț au fost găsite ca fiind neglijabil de mici, susținând ipoteza pieței eficiente. Totuși a fost arătat în anii 1980 că, folosind informațiile prezente în serii temporale adiționale ca raportul câștig/preț, beneficiu al dividendelor și variabilele termen-structură, este posibil să se facă predicții ale ratei de întoarcere ale unui anumit bun pentru o durată mare de timp, mult mai lungă decât o lună. Aceste observații empirice au pus la încercare forma strictă a ipotezei pieței eficiente.

Astfel observațiile empirice și considerațiile teoretice au arătat că schimbările de preț sunt dificil, dacă nu imposibil de prezis, dacă una dintre caracteristicile de pornire ale seriei temporale a prețurilor se schimbă. În forma strictă, ipotezei pieței eficiente este un sistem idealizat. În piața concretă, ineficiențe reziduale sunt întotdeauna prezente. Căutarea și exploatarea oportunităților de arbitraj este una dintre căile de eliminare a ineficienței pieței.

Teoria complexității algoritmice - descrierea unui joc corect în termeni de martingale este mai degrabă formală. Teoria algoritmică a complexității a fost dezvoltată independent de Kolmogorov [70] și Chaitin [71] la mijlocul anilor 1960, întâmplător în același timp cu aplicațiile martingale-lui în economie. În teoria algoritmică a complexității, complexitatea unui anumit obiect codat într-o secvență binară de n digiți este dată de lungimea celor $K^{(n)}$ biți, ai celui mai scurt program de calculator care poate imprima aceeași secvență simbolică. Kolmogorov a arătat că un asemenea program există; și a denumit acest algoritm „optim asimptotic”. De exemplu pentru scrierea valorii lui π și seria temporală a valorilor mediei

zilnice ale indicelui industrial Dow-Jones scriem cele două secvențe de numere folosind, pentru fiecare serie separat, un algoritm ce ține seama de regularitățile prezente în fiecare secvență de numere. Cel mai bun algoritm găsit pentru secvența valorilor lui π este foarte scurt. În contrast, un algoritm cu o eficiență asemănătoare nu a fost găsit pentru indicele Dow-Jones. Seria temporală a indicelui Dow-Jones este o serie ne-redundantă.

În cadrul teoriei complexității, o serie de simboluri sunt considerate impredictibile dacă informația cuprinsă în ele nu poate fi „comprimată” sau redusă la o formă mai compactă. Această afirmație este formal echivalentă cu a spune că cel mai eficient algoritm ce reproduce o anumită serie de simboluri are aceeași lungime cu seria inițială.

Teoria algoritmică a complexității ne ajută să înțelegem comportarea unei serii financiare temporale, ea: *face o conexiune clară între ipoteza pieței eficiente și caracterul impredictibil al prețurilor bunurilor* (această conexiune este manifestată acum de proprietatea că o serie temporală care are o densitate mare de informație economică ne-redundantă prezintă caracteristici statistice care sunt aproape ne-discernabile de cele observate într-o serie temporală aleatoare); *măsurarea deviației de la caracterul aleator furnizează o unealtă pentru a verifica valabilitatea și limitările ipotezei pieței eficiente*; din punctul de vedere al teoriei algoritmice a complexității, *este imposibil să discernem între comerțul de tip „zgomot” sau cel de tip „informație”* (informațiile fundamentale privind bunurile comercializate, intern sau extern pieței)- teoria algoritmică a complexității nu detectează nici o diferență între o serie temporală care poartă o mare cantitate de informații economice ne-redundante și un proces pur aleatoriu.

Datorită cantității atât de mari de informații prezente în datele financiare este atât de greu să se extragă un sub-set de informații economice asociate cu un anumit aspect specific. Dificultatea în a face predicții este astfel legată de abundența informațiilor în datele financiare, și nu de o lipsă a acestora. Atunci când o anumită cantitate de informație afectează într-un fel specific prețul pe piață, piața nu este complet eficientă. Acest fapt ne permite nouă să detectăm, din seriile temporale ale prețurilor, prezența acestei informații.

Sisteme idealizate în fizică și finanțe - Piața eficientă este un model idealizat și piața reală este numai aproximativ eficientă. Acest fapt nu sună ne-familiar fizicienilor deoarece ei sunt bine acomodați cu studiul sistemelor idealizate. Într-adevăr, utilizarea sistemelor idealizate în investigația științifică a fost folositoare în dezvoltarea fizicii ca disciplină. Cum ar arăta fizica fără idealizări, ca mișcarea fără frecare, transformările reversibile în

termodinamică, sau sisteme infinite în stare critică. Fizicienii folosesc aceste abstractizări pentru a dezvolta o teorie și a proiecta experimente. În același timp fizicienii nu uită că sistemele idealizate aproximează numai lumea reală, și comportarea sistemelor reale va diferi întotdeauna de cea a unui sistem ideal. O abordare asemănătoare poate fi făcută și în cazul studiului sistemelor financiare. Putem presupune realistic condiții „ideale”, de exemplu existența unei piețe eficiente perfecte, și în folosind acest cadru idealizat să dezvoltăm teorii și să efectuăm teste empirice. Valabilitatea rezultatelor va depinde de valabilitatea presupunerilor făcute.

Clase importante de procese stohastice - Clasa proceselor aleatoare infinit divizibile este o clasă largă care include clasa proceselor aleatoare stabile. Procesele aleatoare infinit divizibile pot avea varianță finită sau infinită [72, 73]. Procesele aleatoare stabile ne-Gaussiene au varianță infinită, pe când procesul Gaussian este singurul proces stabil cu varianță finită.

Observații empirice, împreună cu teoremele limită [74], ne permit să concluzionăm că pdf-ul schimbărilor de preț trebuie să convergă progresiv spre un pdf infinit divizibil pentru un orizont de timp lung. Teorema limită a lui Khintchine ne asigură că pentru valori mari ale numărului de variabile aleatoare, distribuția schimbărilor de preț este bine definită, în ciuda faptului că procesul stohastic al schimbărilor de preț la un timp dat poate fi caracterizat de parametri și forme funcționale care sunt dependente de timp. Mai mult, teorema lui Khintchine statutează că distribuția schimbărilor de preț este apropiată de un pdf infinit divizibil și că gradul de convergență crește odată cu creșterea numărului de variabile existente. Deci un pdf al schimbărilor de preț pentru un orizont de timp îndelungat poate fi considerat în termeni de sumă a unor variabile aleatoare i.i.d. Chiar în prezența unor fluctuații volatile, este posibil să se modeleze schimbările de preț în termeni ai unor noi definite variabile aleatoare i.i.d. Informațiile extrase din aceste procese aleatoare i.i.d. sunt aplicate pdf-urilor pentru orizonturi mari de timp, și nu pentru scale de timp locale.

Scalele și sistemele de măsură în datele financiare - O cantitate imensă de date financiare este înregistrată și stocată în calculatoare în mod curent. Într-adevăr, astăzi orice tranzacție de pe orice piață financiară a lumii este înregistrată într-un anumit fel. Natura și formatul acestor date depinde de bunul financiar aflat în discuție și de instituția particulară care colectează datele. Datele au fost înregistrate fie pentru fiecare zi (începând din secolul XIX) fie cu o rată de eșantionare de 1 minut (din 1984) și în ultima perioadă tranzacție cu tranzacție. Analize statistice ale datelor financiare au fost realizate încă de la data începerii înregistrărilor.

Atunci când procesarea datelor pe calculator a devenit posibilă, analiza statistică a implicat progresiv un număr din ce în ce mai mare de înregistrări financiare (Mandelbrot analiza prețul bumbacului folosind $\approx 2 \cdot 10^3$ înregistrări, analiza indexului Standard & Poor 500 [75] analiza $\approx 5 \cdot 10^5$ înregistrări, iar un studiu recent [76] folosea $4 \cdot 10^7$ schimbări relative ale prețului pentru primele 1000 cele mai mari companii tranzacționate la „New York Stock Exchange”). Analizele statistice ale piețelor sunt esențiale, atât pentru motive fundamentale privind înțelegerea dinamicii piețelor, cât și pentru scopuri practice legate de problema cheie a opțiunii de preț și managementul portofoliilor.

În fizică, problema unităților de referință este considerată de bază în toate experimentele și lucrările teoretice. Se fac eforturi continue pentru a găsi unitățile de referință optimale și de a îmbunătăți acuratețea determinării lor. O ramură a fizicii, metrologia, este dedicată exclusiv acestei sarcini, și există mari institute specializate în metrologie peste tot în lume. În finanțe, este prezentă aproape situația opusă. Scala folosită este deseori dată în unități (monede) care sunt ele însele fluctuante în timp iar tranzacțiile se efectuează la momente aleatoare cu intensități aleatoare. Din acest motiv, trebuie multă precauție luată în selectarea celor mai optime variabile de a fi studiate, luând în considerare presupunerea implicită asociată cu fiecare alegere posibilă.

Unitatea de preț a bunului material este de obicei moneda țării în care piața financiară specifică este localizată. Valoarea monedei nu este constantă în timp. O monedă își poate schimba valoarea datorită inflației, creșterii sau recesiunii economice, și fluctuațiilor de pe piața monetară globală.

Alegerilor scalelor de timp optime ce pot fi utilitate la analizarea datelor pieței este și ea o problemă dificilă. Candidații posibili pentru scala temporală „corectă” includ: timpul fizic, timpul tranzacțiilor (al pieței), sau numărul alocat tranzacțiilor. O alegere lipsită de discuții nu este posibilă. Ca și în cazul unităților de preț, toate definițiile au merite și toate au probleme. Când examinăm schimbările de preț ce au loc atunci când apare o tranzacție, trebuie notat că fiecare tranzacție ce are loc la un moment aleatoriu în timp fapt care implică o variabilă aleatoare, volumul bunului tranzacționat.

Timpul fizic este bine definit, dar bursele de mărfuri se închid noaptea, peste week-end-uri și de sărbători. O limitare similară este de asemenea prezentă și pe o piață globală, ca cea monetară internațională. Cu toate că această piață este deschisă 24 de ore pe zi, organizațiile sociale de afaceri ca și ciclurile biologice forțează activitatea pieței să aibă constrângeri

temporale pentru fiecare regiune a globului. Alegând un *timp fizic*, nu știm cum să modelăm dinamica stohastică a prețurilor și fluxul de date pe perioada orelor când piața este închisă.

Timpul tranzacției este bine definit în schimbul de mărfuri – este timpul ce a trecut de la ora de deschidere a pieței financiare. Pe piețele monetare internaționale el coincide cu timpul fizic. Studii empirice au încercat să determine varianța logaritmului schimbărilor de preț observate de la închidere la închidere pe piețele financiare. Aceste studii arată că varianța determinată considerând valorile de închidere ale zilelor succesive este cu numai 20% mai mică decât varianța determinată considerând valorile de închidere peste week-end [77]. Această observație empirică susține alegerea folosirii timpului de tranzacție în modelarea dinamicii prețurilor. Într-adevăr, timpul de tranzacție este cea mai comună alegere în studiile de cercetare și în studiile realizate pentru determinarea volatilității în opțiunea prețurilor. Totuși, există probleme care se ridică și acestei definiții. Anume, informații afectând dinamica prețului bunului financiar pot exista pe durata închiderii pieței (sau când activitatea sa este neglijabilă într-o anumită arie financiară), în analiza de înaltă frecvență modificările prețurilor de peste noapte sunt tratate ca schimbări pe termen scurt, și activitatea pieței se presupune că este uniformă pe durata orelor cât este deschisă. Această din urmă presupunere nu este verificată de analize empirice. Activitatea pieței nu este uniformă pe durata orelor cât este deschisă, nici în termeni de volum nici ai numărului de contracte. Mai precis, un ciclu zilnic este observat în datele de piață: volatilitatea este mai mare la deschiderea și închiderea pieței, și de obicei cea mai scăzută valoare intervine la mijlocul zilei.

Putem să analizăm și alte definiții ale activității temporale care nu sunt afectate de faptul că activitatea tranzacțională nu este uniformă în timp. O definiție se referă la indexul numărului tranzacțiilor efective ce au loc pe piață pentru un anumit bun financiar. Folosirea acestei definiții nu este ușoară deoarece date de tip „tick-by-tick” sunt necesare pentru a realiza o analiză statistică în termenii acestui index temporal. Totuși, o asemenea analiză este posibilă astăzi deoarece acest tip de date sunt disponibile, cel puțin pentru unele piețe financiare. Dacă „timpul” este definit în termeni de număr al tranzacției, atunci o sursă de manifestare aleatoare observată în piețele financiare este eliminată, anume timpul ce separă două tranzacții. Oricum rămâne în continuare a doua sursă aleatoare, volumul tranzacțiilor.

Nu este ușor de selectat funcția de preț și cadrul referinței temporale care să fie utilizat în analiza și modelarea dinamicii stohastice a prețurilor. Sunt posibile câteva alegeri, fiecare bazată pe presupunerea explicită sau implicită că poate este sau poate să nu fie verificată pentru

un bun într-o anumită perioadă de timp. Analizele empirice sunt deseori realizate folosind puțin diferite definiții ale variabilelor investigate, de exemplu întoarcerile sau diferențele de preț logaritmice, perioade de timp analizate, și frecvențe înregistrate ale datelor. Rezultatele sunt sensibile la aceste alegeri, astfel încât trebuie să avem grijă atunci când comparăm rezultatele obținute de diferiții cercetători pentru diferite bunuri financiare sub diferite condiții temporale. Poate că acesta este motivul caracterizării incomplete încă a proprietăților statistice ale modificărilor de preț, în ciuda numărului mare de analize empirice existente.

Staționaritatea și corelațiile temporale - gradul de staționaritate observat în seriile temporale ale schimbărilor de preț din piața financiară este o caracteristică importantă a proceselor financiare. Există clase de corelație de scurtă și lungă durată ale proceselor stohastice, și există multe studii empirice privind această comportare a datelor financiare. Atunci când variabilele stohastice sunt independente, staționaritatea implică faptul că procesul stohastic este identic independent distribuit. Un proces stohastic este staționar dacă pdf-ul său este invariant la o deplasare temporală. Această definiție este considerată câteodată a fi o definiție foarte strictă a unui proces stohastic, și este numită de fizicieni „*staționaritate în sens strict*”. Sunt de altfel definiții mai puțin restrictive ale staționarității unui proces [78]. Finitudinea ariei de sub funcția de autocorelație dă informații asupra scalei temporale tipice a memoriei procesului. De fapt, ca o aproximație de ordin zero, este posibil să modelăm procesul spunând că o corelație totală este prezentă până la un timp caracteristic și nici o corelație nu este prezentă pentru timpi mai mari. Totuși, nu toate integralele funcțiilor monoton descrescătoare sunt finite [79].

Procesele aleatoare corelate pe distanțe scurte pot fi caracterizate referitor la proprietățile statistice de ordin doi, investigând funcția de autocorelație și/sau spectrul de putere. O funcție de autocorelație cu scădere rapidă și un spectru de putere semănând cu cel al zgomotului alb (sau spectru de putere $1/f^2$ pentru variabila integrală) sunt „amprente” ale procesele stohastice cu corelație scurtă. Procesele stohastice caracterizate de o funcție de autocorelație de tip lege-putere sunt corelate pe distanțe lungi. Funcții de autocorelație de tip putere sunt observate în multe sisteme – fizice, biologice și economice. Este dificil de distins între un zgomotul $1/f$ și proces cu multe scale temporale caracteristice. Pentru a imita un zgomot $1/f$ pe un interval dat de timp, strict vorbind, sunt necesar un număr infinit. Însă, dacă este cerută numai o acuratețe finită, atunci un număr finit de scale caracteristice este necesar. A

fost estimat [80] că o densitate de putere spectrală $1/f$ ce se întinde peste zece ordine de mărime poate fi mimată cu o precizie de cinci procente de răspunsul unui sistem liniar în care sunt prezente cel puțin opt scale temporale, iar pentru o precizie de un procent numărul minim de scale temporale necesare este de ordinul a patruzeci.

Cunoașterea primului și celui de al doilea ordin al densității de probabilitate condiționată caracterizează complet un proces Markov atâta timp cât orice densitate de probabilitate mutuală poate fi determinată din ele. Pentru un proces ne-Markovian, această cunoaștere nu este suficientă pentru a caracteriza pe deplin procesul stohastic. Procesele stohastice ne-Markoviene având densitățile de probabilitate condiționată în primul și al doilea ordin egale sunt, în general, diferite deoarece densitățile de probabilitate mutuală pentru toate ordinele sunt necesare pentru a caracteriza complet procesele stohastice corelate pe distanțe lungi. Astfel, semnale diferite de tip zgomot $1/f$ nu pot fi considerate ca fiind același tip de proces stohastic, dacă informațiile despre densitățile de probabilitate mutuală de ordin superior nu sunt cunoscute.

În legătură cu corelația temporală ce apare în seriile financiare, există doar corelații de distanță scurtă în schimbările de preț, dar în volatilitate există corelații de distanță lungă. Funcția de autocorelație a schimbărilor de preț are o scădere exponențială cu o caracteristică de timp mică – câteva minute tranzacționale pentru indexul S&P 500 [1]. Totuși, independența reciprocă nu implică în mod direct că schimbările de preț sunt variabile aleatoare independente. Câteva studii realizate de economiști și fizicieni au arătat că funcția de autocorelație a funcțiilor neliniare ale schimbărilor de preț au o memorie temporală mult mai lungă. Într-adevăr funcții neliniare ca valoarea absolută sau pătratul sunt corelate pe termen lung pentru indicii de stoc și pentru rata de schimb valutar. Prezența corelațiilor pe durate lungi în valoarea pătratului schimbărilor de preț sugerează că acolo este posibil să fie prezente și alte procese stohastice fundamentale suplimentare schimbărilor de preț. Aceste procese sunt adeseori definite ca volatilitate. Volatilitatea este adeseori estimată din calculul deviației standard a modificărilor de preț într-o fereastră temporală adecvată.

Dinamica stohastică a prețului unui bun financiar poate fi descrisă aproximativ de un drum aleatoriu caracterizat de o corelație de durată mică. Analizele empirice ale datelor financiare arată că schimbările de preț nu pot fi descrise ca un proces stohastic staționar în sensul strict, atâta timp cât deviația standard a schimbărilor de preț, anume volatilitatea, este dependentă de timp pe piețele reale. Totuși, forma de staționaritate care este prezentă pe piețele

financiare este în cel mai bun caz o staționaritate asimptotică. Analizând serii temporale suficient de lungi, pdf-ul asimptotic al schimbărilor de preț poate fi analizat, și asimptotică da proprietățile statistice de lungă durată ale proceselor stohastice.

Schimbările de preț sunt necorelate reciproc, acesta este comportarea statistică observată în datele empirice. O memorie temporală de numai câteva minute este observată în schimbările indicilor financiari. De asemenea o memorie slabă de lungă durată pare să fie prezentă în schimbările de preț așa cum se observă în evoluția temporală a volatilității, care este corelată pe durate lungi cu o densitate spectrală de tipul $1/f$.

Modele stohastice ale dinamicii prețurilor - Proprietățile statistice ale evoluției temporale ale prețurilor joacă un rol esențial în modelarea piețelor financiare. De exemplu, cunoașterea naturii stohastice a prețului unui bun financiar este crucială în valorizarea rațională a prețului produselor derivate. Caracterizarea completă a unui proces stohastic necesită cunoașterea densităților de probabilitate condiționată pentru toate ordinele. Această sarcină extraordinară nu poate fi atinsă în practică. Abordarea empirică folosită de fizicieni este realizată în doi pași. Primul constă în investigarea corelațiilor temporale și ale spectrului de putere, pe când cel de al doilea se ocupă de studiul pdf-ului asimptotic.

Cel mai comun model stohastic al dinamicii prețurilor stocurilor presupune că logaritmul său este un proces difuziv, și că incrementele acestui logaritm se presupun a fi Gaussian distribuite. Acest model, cunoscut ca mișcarea geometrică Browniană, dă o primă aproximație a a comportării observate în datele empirice. Totuși, deviații sistematice de la predicțiile acestui model sunt observate, distribuțiile empirice fiind mai degrabă leptokurtice decât Gaussiene. O distribuție puternic leptokurtică este caracterizată de un maxim mai îngust și mai pronunțat, și de o coadă mai întinsă decât în cazul Gaussian. Gradul de leptokurticitate este mult mai mare pentru datele de mare frecvență.

Bazate pe presupunerea teoretică și pe analizele empirice, au fost propuse câteva modele alternative la modelul mișcării geometrice Browniane. Modele diferă între ele nu numai prin alura și leptokurticitatea pdf-urilor, dar și referitor la proprietăți cheie precum: caracterului finit sau infinit al momentului secund sau a celor superioare ale distribuției; natura staționarității prezente pe o scală temporală scurtă sau asimptotică; caracterul continuu sau discontinuu al prețului sau logaritmului său; și comportarea proceselor stohastice la scalare.

Cele mai cunoscute astfel de modele sunt modelul Lévy stabil ne-Gaussian [81], distribuția t a Studentilor [82], amestecul unor distribuții Gaussiene [83], și zborul Lévy trunchiat [84].

Alte modele proeminente includ modelul salt-difuziune [85] și procesele stohastice distribuite hiperbolic [86]. Modelele stohastice având o varianță cu dependență temporală pe perioade scurte de timp sunt frecvent modelate în termenii de procese „autoregressive conditional heteroskedasticity” (ARCH) sau, în forma generalizată, a proceselor GARCH.

Scalarea și evenimentele rare - nu există un model acceptat de toți cercetătorii privind evoluția temporală a logaritmului prețurilor. Orice model trebuie să concorde cu observațiile empirice și implicit să poată răspunde la întrebări ca: este momentul secund al distribuției schimbărilor de preț finit?; este prezentă auto-similaritatea?; dacă este prezentă auto-similaritatea, care este natura ei?; peste ce interval de timp este prezentă auto-similaritatea?

Una dintre cheile descrierilor proprietăților statistice ale prețurilor stocurilor se referă la „evenimentele rare”, anume la rarele apariții ale unor pulsuri mari, pozitive sau negative. Analiza cantitativă a acestor proprietăți este dificilă, și sunt necesare baze de date extrem de mari (sau pe perioade extrem de lungi) pentru a trage niște concluzii de încredere. Un studiu [87], a analizat comportarea de înaltă frecvență pe o perioadă de doi ani a celor mai mari 1 000 companii tranzacționate la trei piețe majore de stoc (NYSE, AMEX și NASDAQ). Comportarea în ansamblu a evenimentelor rare a acestor companii a fost studiată considerând distribuția cumulativă a variabilei normalizate, distribuția cumulativă a probabilității a fost găsită ca fiind de tip putere pentru valori mari ale lui argumentului legii putere, atât pentru valori pozitive cât și negative ale sale. Acest rezultat este de asemenea în concordanță cu concluzia că momentul secund al schimbărilor prețurilor este finit [88, 89].

Procesele arch și garch - există dovezi puternice empirice și teoretice ce susțin concluzia că volatilitatea logaritmului schimbărilor de preț a unui bun financiar este un proces stohastic dependent de timp. O posibilitate de descriere a proceselor stohastice caracterizate de varianță (volatilitate) dependentă de timp, sunt așa numitele procese ARCH, introduse de Engle în anul 1982 [90]. Modelele ARCH au fost aplicate la câteva arii diferite ale economiei. Exemple includ media și varianța inflației Marea Britanie, ratele dobânzilor, și ratele de schimb monetar. Modelele ARCH sunt larg studiate în economie și finanțe și literatura dedicată lor

este enormă. Ele pot fi de asemenea atractive pentru descrierea sistemelor fizice.

Modelele ARCH sunt modele simple care pot descrie un proces stohastic care este local nestaționar dar asimptotic staționar. Aceasta implică faptul că parametrii ce controlează funcția densitate condiționată de probabilitate la un timp fluctuează. Totuși, o asemenea dependență temporală „locală” nu împiedică procesul stohastic să aibă un pdf asimptotic bine definit.

Procesele ARCH sunt modele stohastice motivate empiric, discrete temporal, pentru care varianța la timpul t depinde, condițional, de anumite valori trecute ale pătratelor semnalului aleatoriu însuși. Procesele ARCH definesc clase de modele stohastice deoarece fiecare model specific este caracterizat de un număr dat de parametrii de control și de o formă specifică a pdf-ului, numită pdf condiționat, a procesului ce generează variabila aleatoare la timpul t .

Procesele ARCH și GARCH sunt clase extrem de interesante de procese stohastice. Ele sunt larg folosite în finanțe, și vor fi folosite curând și în alte discipline. Referitor la datele de înaltă frecvență ale stocului de piață, procesele ARCH/GARCH cu pdf condițional Gaussian sunt în stare să descrie pdf-ul schimbărilor de preț pentru un orizont temporal dat, dar eșuează în a descrie potrivit proprietățile de scalare ale pdf-urilor la diferite orizonturi temporale.

Rămân deschise întrebări privind această clasă de procese stohastice includ, printre acestea: care este forma asimptotică a pdf-ului proceselor ARCH și GARCH caracterizată de o anumită funcție de densitate de probabilitate condițională dată, care este natura proprietăților de scalare ale probabilității de întoarcere la origine ca funcție de valoarea parametrilor de control și de forma funcției densitate de probabilitate?

Piețele financiare și turburența - una dintre obiecțiile ridicate deseori față de abordarea fizicienilor care lucrează cu sisteme economice este acela că acest tip de activitate nu poate fi o ramură a fizicii deoarece „ecuația de evoluție a procesului” este necunoscută. Dar dacă acest criteriu – cerința ca Hamiltonianul procesului să fie cunoscut sau posibil de obținut – ar trebui aplicat explicit, câteva domenii de cercetare fructuoase din fizică ar fi descalificate, de exemplu, modelarea frecării sau multe studii din aria fizicii materiei granulare. Mai mult, un număr de probleme care sunt descrise în fizică de o ecuație bine definită [91] – ca turburența – nu sunt rezolvabile analitic, chiar folosind un aparat matematic și fizic sofisticat.

La nivel calitativ, turburența și piețele financiare sunt în mod avantajos similare. De exemplu, în turburență, putem injecta energie la o scală mare, și observând apoi maniera în

care energia este transferată la scale succesiv mai mici. În sistemele financiare „informația” poate fi injectată în sistem la o scală mare și reacția la această informație este transferată către scale mai mici – până la investitorul individual. Într-adevăr, cuvântul „turbulent” a intrat în uzul comun de când fluctuația prețurilor în finanțe este asemănată cu fluctuațiile vitezei din turburență. Este această paralelă calitativă folositoare la un nivel cantitativ, astfel încât înțelegerea noastră asupra turburenței poate fi relevantă în înțelegerea fluctuațiilor prețurilor?

Discuția turburenței în paralel cu modelarea stohastică a a prețurilor stocurilor arăta cât de fertilă este abordarea interdisciplinară, prezentând importante aspecte calitative similare. Totuși corespondența formală dintre turburență și sistemele financiare nu este susținută de calcule cantitative. Analiza paralelă a fluctuațiilor de viteză în turburență și schimbările de index (sau rată de schimb valutar) pe piețele financiare arată că aceleași metode statistice pot fi folosite pentru a investiga sisteme cu ecuații de mișcare cunoscute, dar nerezolvabile, și sisteme pentru care descrierea matematică a procesului lipsește. În cele două manifestări există atât similarități: intermitență, pdf ne-Gaussian, și convergență garduală spre atractor Gaussian în probabilitate, cât și diferențe: pdf-ul are formă diferită în cele două sisteme, și probabilitatea de întoarcere la origine prezintă manifestări diferite – pentru turburență nu observăm un regim scalare pe când pentru schimbările de index observăm un regim de scalare ce se întinde pe mai mult de trei ordine de magnitudine. Mai mult, fluctuațiile de viteză sunt anticorelate pe când fluctuațiile indexului (sau ale ratei de schimb valutar) sunt esențialmente necorelate.

Corelație și anticorelație între stocuri - una dintre cele mai atrăgătoare idei din econofizică este aceea că piețele financiare pot fi descrise similar cu descrierea de succes a fenomenelor critice. Fenomenele critice sunt fenomene fizice care apar în spațiu (real sau abstract) și timp. Putem să nu considerăm numai un produs și evoluția sa temporală, ci putem discuta o abordare bazată pe investigarea simultană a câtorva serii temporale de prețuri de stoc aparținând unui anumit portofoliu. Într-adevăr, prezența unor corelații încrucișate (și anticorelații) între perechi de stocuri este binecunoscută de mult timp, și joacă un rol cheie în teoria selecției celui mai eficient portofoliu a unor bunuri materiale [92, 93]. Proprietățile specifice ale matricei de covarianță a întoarcerilor stocurilor unui portofoliu dat a fost investigat pe larg. Problemele importante ale acestei taxonomii sunt detectarea numărului de factori economici care afectează dinamica prețurilor stocurilor pe o anumită piață financiară [94], și evaluarea

deviațiilor observate dintre datele pieței și rezultatele așteptate din teoria matricelor aleatoare [95, 96].

Analizele coeficienților de corelație și ale matricei de covarianță ale prețurilor bunurilor de pe piețele financiare arată că este prezentă o sincronizare între perechile de date. Este plauzibil ca prezența unui grad relevant de inter-corelație între stocuri să trebuiască să fie luată în considerație la modelarea piețelor financiare. Evidența existenței unui mic număr de factori economici care conduc evoluția un mare număr de bunuri, este de asemenea detectată. Aceste informații nu sunt inconsistente cu ipoteza pieței eficiente deoarece sincronizarea dintre bunuri și existența unor factori economici nu implică direct predictibilitatea temporală a prețurilor viitoare ale bunurilor. Inter-corelațiile pentru perioade date de timp, și cunoașterea precisă a naturii factorilor și a dinamicii lor, dacă sunt prezenți, va furniza posibilități de arbitraj și deviații de la eficiența pieței.

Taxonomia unui portofoliu de stocuri - coeficientului de corelație ne permite să cuantificăm gradul de sincronizare al stocurilor. Acest concept este util în două moduri, ne permite să definim o metrică care să furnizeze distanța relativă dintre stocurile unui anumit portofoliu, și ne furnizează o metodă pentru a extrage informații economice stocate în seria temporală a prețurilor de stoc. Un punct cheie în teoria informației este acela că o serie temporală care nu este redundantă adeseori formează un proces aleatoriu. Știm astăzi că este posibil să implementăm strategii care să ne permită să obținem taxonomii semnificative dacă plecăm de la analiza sincronă a seriilor temporale ale prețurilor a mai multor stocuri. Concret, putem regăsi părți ale informației stocate în seriile temporale ale prețurilor individuale dacă calculăm distanțele dintre perechile de stocuri ale portofoliului, și presupunem că spațiul ultraparametric sub-dominant este o topologie potrivită [97, 98].

Contracte pe piețele idealizate și cele reale - dinamica prețurilor este un subiect complex, și un model definitiv nu a fost încă realizat. Complexitatea întregului sistem financiar este încă și mai mare. Nu este vorba numai de complexitatea tranzacționării produselor financiare, o sursă suplimentară de mărire a complexității vine din distribuția contractelor financiare pe aceste bunuri financiare fluctuante. O clasă importantă de contracte financiare este aceea a produselor derivate, a produselor financiare al căror preț depinde de prețul altor produse financiare [99, 100]. Soluția Black & Scholes pentru problema preț/opțiune este o

piatră de hotar în finanțele moderne. Modelul lor privind activitatea financiară prinde trăsăturile fundamentale ale pieței financiare reale. Unele aspecte, nu reflectă totuși pe deplin comportarea stohastică observată pe piața reală. De exemplu ipoteza Gaussiană a schimbărilor în logaritmul prețurilor stocurilor este incorectă – în special atunci când schimbările sunt de înaltă frecvență. De asemenea drumul realizat de prețul bunului urmărit poate fi discontinuu la momentul sosirii unor informații economice relevante și volatilitatea unui anumit stoc sau inex și rata de interes nu sunt constante, și sunt ele însele procese aleatoare.

Modelarea pieței financiare reale este numită câteodată modelarea „piețelor cu imperfecțiuni. Terminologia folosită în literatura economică sugerează o paralelă perfectă cu un scenariu similar observat în științele fizice. De exemplu, este mult mai simplu să construiești o descriere generalizată a mișcării unui sistem mecanic într-o lume idealizată fără frecare decât în lumea reală. O situație similară este întâlnită atunci când comparăm termodinamica de echilibru cu cea de ne-echilibru. A cunoaște proprietățile statistice ale dinamicii prețului unui produs este crucial pentru modelarea pieței financiare reale. Avem nevoie să cunoaștem proprietățile statistice ale dinamicii unui anumit produs înainte de a putea determina prețul rațional al unei contract emis pe bunul respectiv. Discontinuitatea în variația prețului bunului este numai una dintre „imperfecțiunile” care ne forțează să căutăm o procedură mai puțin generală preț/opțiune. Altă „imperfecțiune” a pieței reale constă din caracterul aleatoriu al volatilității prețului bunului. Atunci când volatilitatea aleatoare este prezentă, nu este în general posibil să se găsească prețul opțiunii presupunând simplu că nu sunt posibilități de arbitraj. În unele modele, prețul de piață al riscului de volatilitate trebuie specificat înainte de a fi obținută ecuația cu derivate parțiale a prețului opțiunii.

Este o abordare comună în știință să se folosească un sistem model pentru a înțelege aspectele fundamentale ale unei probleme științifice. Modelul idealizat nu este capabil să descrie toate aspectele observate pe sistemul real, dar este capabil să le descrie pe acelea care sunt esențiale. De îndată ce volatilitatea modelului idealizat este apreciată, expresii și generalizări ale modelului sunt realizate pentru a încerca o mai bună descriere a sistemului real aflat sub discuție. Unele extensii nu modifică natura soluției obținute folosind modelul, dar altele o fac. Modelul Black & Scholes este unul dintre cele mai de succes modele idealizate folosite curent. De la data introducerii sale a apărut o mare cantitate de material științific ce se ocupă de extensia modelului, aceste extensii par să relaxeze presupuneri care pot să nu fie realiste pentru piața financiară (găsirea prețului opțiunilor folosind rata de interes stohastic

[101]; găsirea prețului opțiunilor folosind procese difuziune-salt/salt-pur ale prețului stocului [102]; găsirea prețului opțiunilor folosind volatilitatea stohastică [103]; și găsirea prețului opțiunilor folosind distribuții ne-Gausiene ale logaritmului prețurilor și folosind distribuții Lévy trunchiate [104])

Cunoașterea completă a proprietăților statistice ale dinamicii întoarcerilor bunurilor financiare este esențială pentru motive fundamentale și aplicative. Această cunoaștere este esențială pentru construirea și testarea modelelor statistice ale pieței financiare, dar acest scop nu a fost încă atins.

Fizicienii statisticieni și teoretici pot contribui la rezolvarea acestor probleme științifice prin împărțirea – cu cercetătorii din alte discipline implicate – problemelor de bază din domeniul fenomenelor critice, sistemelor dezordonate, scalării, și universalității care au fost dezvoltate pe parcursul ultimilor ani.

Procese stohastice și procese deterministice, controlul comportării - Seriile temporale ce descriu evoluția unor procese dinamice financiare complexe prezintă corelații puternice între variabile pe multe grade de libertate. Este un lucru general acceptat că economia aparține clasei sistemelor foarte complexe și din punctul de vedere al fizicii trăsăturile dinamice fundamentale trebuie descrisă atât prin modele deterministice cât și prin analiză statistică [1].

Controlul unor procese economice și sociale este fără doar și poate unul dintre cele mai incitante sarcini pe care economiștii și politicienii le pot avea. Controlul unor procese atât de complexe poate fi reevaluat la nivel științific dacă se face apel la teoria controlului haosului [105-106]. Modele de control bazate pe metoda feedback-ului întârziat pot fi aplicate cu succes pentru a suprima haosul deterministic în modelele micro-economice [107-108]. Plecând de la metoda OGY (Ott, Grebogi și Yorke) care aplică observația că o soluție haotică are în imediata vecinătate un număr infinit de orbite periodice instabile. Cu toate că este bine acoperită din punct de vedere teoretic implementarea practică este limitată de faptul că toate măsurile necesare pentru a calcula valorile parametrilor de control ai sistemelor nu sunt date direct dintr-un lanț de date experimentale și pentru a putea aplica un control trebuie să supunem sistemul unei analize complexe. Dar chiar și așa există abordări care arată modalitățile de aplicare ale metodei în cazul sistemelor microeconomice [109]. Spre deosebire de această metodă, Pyragas a introdus o modalitate de control a haosului pentru care cunoașterea ecuațiilor de evoluție ale sistemului nu este necesară [110-111]. Traectoria unui sistem

continuu temporal, sub influența unei forțe de control, forță stabilizatoare, devine stabilă și predictibilă. Importanța metodei (autosincronizarea prin feedback întârziat) este aceea că parametrul de control poate fi făcut să tindă la zero atunci când sistemul atinge orbita dorită.

Diferite alegeri ale forței de control au fost folosite pentru varianta discretă temporal a problemei. Rezultatele analitice (bazate pe teoria Floquet) au arătat că limitările controlului sunt corelate cu numărul de multiplicități reale Floquet (corespunzând cu orbitele dorite) care sunt mai mari decât unitatea. În aceste tipuri de control prin feedback ale sistemelor s-au observat o serie de tipuri de bifurcații (inclusiv Hopf) [112].

O serie întreagă de modele „fizice” microeconomice au fost elaborate, dintre acestea unele deosebit de simple, ca extensia la economie a modelului neliniar Richardson a cursei înarmărilor [113], pentru care controlul prin aplicarea forței stabilizatoare poate fi realizat în condiții optime.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Mantegna, R. N. & Stanley, H. E. (2000) *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.).
- [2] F. Black and M. Scholes, 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', *J. Polit. Econ.* **81**, 637-654 (1973).
- [3] V. Pareto, *Cours d'Economie Politique* (Lausanne and Paris, 1897).
- [4] P. Levy, *Calcul des probabilités* (Gauthier-Villars, Paris, 1925).
- [5] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).
- [6] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1971).
- [7] A. Einstein, 'On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat', *Ann. Physik* **17**, 549-560 (1905).
- [8] N. Wiener, 'Differential Space', *J. Math. Phys.* **2**, 131-174 (1923).
- [9] L. Bachelier, 'Theorie de la speculation' [Ph.D. thesis in mathematics], *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **III-17**, 21-86 (1900).
- [10] B. B. Mandelbrot, 'The Variation of Certain Speculative Prices', *J. Business* **36**, 394-419 (1963).
- [11] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge MA, 1954).
- [12] J.A. Holyst *et al.*, Deterministic chaos in financial time series, *Eur. Phys. J. B* **20**, 531-535 (2001).
- [13] J.A. Holyst, K. Urbanowicz, *Chaos control in economical model by time-delayed feedback method*, *Physica A* **287**, 587 (2000);
- [14] E. Majorana, 'Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali', *Scientia* **36**, 58-66 (1942).
- [15] L. P. Kadanoff, 'From Simulation Model to Public Policy: An examination of Forrester's Urban Dynamics', *Simulation* **16**, 261-268 (1971).
- [16] E. W. Montroll and W. W. Badger, *Introduction to Quantitative Aspects of Social Phenomena* (Gordon and Breach, New-York, 1974).
- [17] P. W. Anderson, J. K. Arrow and D. Pines, eds., *The Economy as an Evolving Complex System* (Addison-Wesley, Redwood City, 1988).
- [18] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theories des Risques Financiers* (Eyrolles, Ales-Saclay, 1997).
- [19] I. S. Ghashghaie, W. Breyermann, J. Peinke, P. Talkner, and Y. Dodge, 'Turbulent Cascades in Foreign Exchange Markets', *Nature* **381**, 767-770 (1996).
- [20] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, 'Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations', *Eur. Phys. J. B* **3**, 139-140 (1998).
- [21] R. N. Mantegna, 'Levy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange', *Physica A* **179**, 232-242 (1991).
- [22] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index', *Nature* **376**, 4649 (1995).
- [23] M. Potters, R. Cont, and J.-P. Bouchaud, 'Financial Markets as Adaptive Ecosystems', *Europhys. Lett.* **41**, 239-242 (1998).
- [24] R. Cont, M. Potters, and J.-P. Bouchaud, 'Scaling in Stock Market Data: Stable Laws and Beyond', in *Scale Invariance and Beyond*, edited by B. Dubrulle, F. Graner, and D. Sornette (Springer, Berlin, 1997).

- [25] W. Li, 'Absence of $1/f$ Spectra in Dow Jones Daily Average', *Intl J. Bifurcations and Chaos* **1**, 583-597 (1991).
- [26] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, 'Quantification of Correlations in Economic Time Series', *Physica A* **245**, 437-440 (1997).
- [27] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Turbulence and Financial Markets', *Nature* **383**, 587-588 (1996).
- [28] A. Arneodo, J. F. Muzy, and D. Sornette, "'Direct" Causal Cascade in the Stock Market', *Eur. Phys. J. B* **2**, 277-282 (1998).
- [29] P. Cizeau, Y. Liu, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, 'Volatility Distribution in the S&P 500 Stock Index', *Physica A* **245**, 441-445 (1997).
- [30] U. A. Muller, M. M. Dacorogna, R. B. Olsen, O. V. Pictet, M. Schwarz, and C. Morgeneegg, 'Statistical Study of Foreign Exchange Rates, Empirical Evidence of a Price Change Scaling Law and Intraday Analysis', *J. Banking and Finance* **14**, 1189-1208 (1995).
- [31] P. Bak, K. Chen, J. Scheinkman, and M. Woodford, 'Aggregate Fluctuations from Independent Sectoral Shocks: Self-Organized Criticality in a Model of Production and Inventory Dynamics', *Ricerche Economiche* **47**, 3-30 (1993).
- [32] P. Bak, M. Paczuski, and M. Shubik, 'Price Variations in a Stock Market with Many Agents', *Physica A* **246**, 430-453 (1997).
- [33] J.-P. Bouchaud and R. Cont, 'A Langevin Approach to Stock Market Fluctuations and Crashes', *Eur. Phys. J. B* **6**, 543-550 (1998).
- [34] G. Caldarelli, M. Marsili, and Y.-C. Zhang, 'A Prototype Model of Stock Exchange', *Europhys. Lett.* **40**, 479-483 (1997).
- [35] D. Challet and Y. C. Zhang, 'On the Minority Game: Analytical and Numerical Studies', *Physica A* **256**, 514-532 (1998).
- [36] M. Levy, H. Levy, and S. Solomon, 'Microscopic Simulation of the Stock-Market - The Effect of Microscopic Diversity', *J. Phys.* **I 5**, 1087-1107 (1995).
- [37] M. Levy and S. Solomon, 'Power Laws Are Logarithmic Boltzmann Laws', *Intl J. Mod. Phys. C* **7**, 595-601 (1996).
- [38] D. Stauffer, 'Can Percolation Theory be Applied to the Stock Market?', *Ann. Phys.-Berlin* **7**, 529-538 (1998).
- [39] D. Stauffer and T. J. P. Penna, 'Crossover in the Cont-Bouchaud Percolation Model for Market Fluctuations', *Physica A* **256**, 284-290 (1998).
- [40] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi, and K. Hamada, 'Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements - The Case of Market Price', *Physica A* **184**, 127-134 (1992).
- [41] H. Takayasu, A. H. Sato, and M. Takayasu, 'Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems', *Phys. Rev. Lett.* **79**, 966-969 (1997).
- [42] T. Lux, 'Time Variation of Second Moments from a Noise Trader Infection Model', *J. Econ. Dyn. Control* **22**, 1-38 (1997).
- [43] T. Lux, 'The Socio-Economic Dynamics of Speculative Markets: Interacting Agents, Chaos, and the Fat Tails of Return Distributions', *J. Econ. Behav. Organ* **33**, 143-165 (1998).
- [44] T. Lux and M. Marchesi, 'Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market', *Nature* **397**, 498-500 (1999).
- [45] J.-P. Bouchaud and D. Sornette, 'The Black & Scholes Option Pricing Problem in Mathematical Finance: Generalization and Extensions For a Large Class of Stochastic Processes', *J. Phys. I France* **4**, 863-881 (1994).

- [46] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theories des Risques Financiers* (Eyrolles, Alea-Saclay, 1997).
- [47] R. Baviera, M. Pasquini, M. Serva, and A. Vulpiani, 'Optimal Strategies for Prudent Investors', *Int. J. Theor. Appl. Finance* **1**, 473-486 (1998).
- [48] S. Galluccio and Y. C. Zhang, 'Products of Random Matrices and Investment Strategies', *Phys. Rev. E* **54**, R4516- R4519 (1996).
- [49] I. S. Galluccio, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, 'Rational Decisions. Random Matrices and Spin Glasses', *Physica A* **259**, 449-456 (1998).
- [50] M. Marsili, S. Maslov, and Y.-C. Zhang, 'Dynamical Optimization Theory of a Diversified Portfolio', *Physica A* **253**, 403-418 (1998).
- [51] D. Sornette, 'Large Deviations and Portfolio Optimization', *Physica A* **256**, 251-283 (1998).
- [52] I. S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner, and Y. Dodge, 'Turbulent Cascades in Foreign Exchange Markets', *Nature* **381**, 767-770 (1996).
- [53] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Turbulence and Financial Markets', *Nature* **383**, 587-588 (1996).
- [54] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Stock Market Dynamics and Turbulence: Parallel Analysis of Fluctuation Phenomena', *Physica A* **239**, 255-266 (1997).
- [55] J. D. Farmer, 'Market Force, Ecology, and Evolution', Adap-Org preprint server 9812005.
- [56] M. Potters, R. Cont, and J.-P. Bouchaud, 'Financial Markets as Adaptive Ecosystems', *Europhys. Lett.* **41**, 239 242 (1998).
- [57] N. Vandewalle and M. Ausloos, 'Coherent and Random Sequences in Financial Fluctuations', *Physica A* **246**, 454-459 (1997).
- [58] L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M. A. Salinger, H. E. Stanley, and M. H. R. Stanley, 'Scaling Behavior in Economics: I. Empirical Results for Company Growth', *J. Phys. I France* **7**, 621-633 (1997).
- [59] L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. A. Salinger, and H. E. Stanley, 'Power Law Scaling for a System of Interacting Units with Complex Internal Structure', *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1385-1388 (1998).
- [60] M. H. R. Stanley, L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M. A. Salinger, and H. E. Stanley, 'Scaling Behavior in the Growth of Companies', *Nature* **379**, 804-806 (1996).
- [61] H. Takayasu and K. Okuyama, 'Country Dependence on Company Size Distributions and a Numerical Model Based on Competition and Cooperation', *Fractals* **6**, 67-79 (1998).
- [62] Y. Lee, L. A. N. Amaral, D. Canning, M. Meyer, and H. E. Stanley, 'Universal Features in the Growth Dynamics of Complex Organizations', *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3275-3278 (1998).
- [63] J. Kertesz and I. Kondor, eds., *Econophysics: Proc. of the Budapest Workshop* (Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999).
- [64] R. N. Mantegna, ed., *Proceedings of the International Workshop on Econophysics and Statistical Finance*, *Physica A* [special issue] **269**. (1999).
- [65] E. F. Fama, 'Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work', *J. Finance* **25**, 383-417 (1970).
- [66] L. Bachelier, 'Theorie de la speculation' [Ph.D. thesis in mathematics], *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **III-17**, 21-86 (1900).
- [67] P. H. Cootner, ed., *The Random Character of Stock Market Prices* (MIT Press, Cambridge MA, 1964).

- [68] I. P. A. Samuelson, 'Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly', *Industrial Management Rev.* **6**, 41-45 (1965).
- [69] E. F. Fama, 'Efficient Capital Markets: II', *J. Finance* **46**, 1575-1617 (1991).
- [70] A. N. Kolmogorov, 'Three Approaches to the Quantitative Definition of Information', *Problems of Information Transmission* **1**, 4 (1965).
- [71] G. J. Chaitin, 'On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences', *J. Assoc. Comp. Math.* **13**, 547-569 (1966).
- [72] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge MA, 1954).
- [73] A. Ya. Khintchine, 'Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze', *Rec. Math. [Mat. Shornik] N. S.* **2**, 79-120 (1937).
- [74] I. B. V. Gnedenko, 'On the Theory of Domains of Attraction of Stable Laws', *Uchenye Zapiski Moskov, Gos. Univ. Matematika* **45**, 61-72 (1940).
- [75] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index', *Nature* **376**, 4649 (1995).
- [76] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, 'Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations', *Eur. Phys. J. B* **3**.139-140(1998).
- [77] K. R. French, 'Stock Returns and the Weekend Effect', *J. Financial Econ.* **8**, 55-69 (1980).
- [78] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, second edition* (McGraw-Hill, New York, 1984).
- [79] J. Y. Campbell, A. W. Lo, and A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets* (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [80] M. S. Keshner, '1/f Noise', *Proc. IEEE* **70**, 212-218 (1982).
- [81] B. B. Mandelbrot, 'The Variation of Certain Speculative Prices', *J. Business* **36**, 394-419 (1963).
- [82] R. C. Blattberg and N. J. Gonedes, 'A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Model for Stock Prices', *J. Business* **47**, 244-280 (1974).
- [83] P. K. Clark, 'A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices', *Econometrica* **41**, 135-256 (1973).
- [84] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, 'Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: the Truncated Levy Flight', *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2946-2949 (1994).
- [85] A. N. Kolmogorov, 'Three Approaches to the Quantitative Definition of Information', *Problems of Information Transmission* **1**, 4 (1965).
- [86] E. Eberlein and U. Keller, 'Hyperbolic Distributions in Finance', *Bernoulli* **1**, 281-299 (1995).
- [87] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, 'Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations', *Eur. Phys. J. B* **3**.139-140(1998).
- [88] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, V. Plerou, and H. E. Stanley, 'Scaling and Volatility Correlations in the Stock Market', Cond.-Mat. preprint server 9905305: *Phys. Rev. E* (in press).
- [89] T. Lux, 'The Socio-Economic Dynamics of Speculative Markets: Interacting Agents, Chaos, and the Fat Tails of Return Distributions', *J. Econ. Behav. Organ* **33**,143-165 (1998).
- [90] R. F. Engle, 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation', *Econometrica* **50**, 987-1002 (1982).
- [91] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

- [92] E. J. Eiton and M. J. Gruber, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (J. Wiley and Sons, New York, 1995).
- [93] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment* (J. Wiley, New York, 1959).
- [94] G. Connor and R. A. Korajczyk, 'A Test for the Number of Factors in an Approximate Factor Model'. *J. Finance* **48**, 1263-1291 (1993).
- [95] I. S. Galluccio, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, 'Rational Decisions. Random Matrices and Spin Glasses', *Physica A* **259**, 449-456 (1998).
- [96] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, 'Noise Dressing of Financial Correlation Matrices', *Phys. Rev. Lett.* **83**. 1467-1470 (1999).
- [97] D. B. West, *Introduction to Graph Theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1996).
- [98] C. H. Papadimitriou and K. Steigitz, *Combinatorial Optimization* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ. 1982).
- [99] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theories des Risques Financiers* (Eyrolles, Alea-Saclay, 1997).
- [100] D. Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory, Second edition* (Princeton University Press. Princeton, 1996).
- [101] K. Amin and R. Jarrow, 'Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy', *Mathematical Finance* **2**, 217-237 (1992).
- [102] D. Bates, 'The Crash of 87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets', *J. Finance* **46**, 1009-1044 (1991).
- [103] S. Heston, 'A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options', *Rev. Financial Studies* **6**, 327-343 (1993).
- [104] A. Matacz, 'Financial Modeling on Option Theory with the Truncated Eevy Process', Working Paper, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Report 97-28 (1997).
- [105] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1196.
- [106] T. Kapitaniak, *Controlling Chaos*, Academic Press, New York, 1996.
- [107] Janusz A. Holyst, Krzysztof Urbanowicz, Chaos control in economical model by time-delayed feedback method, *Physica A* **287** (2000) 587
- [108] T. Kapitaniak, *Controlling Chaos*, Academic Press, New York, 1996.
- [109] J.A. Ho lyst, T. Hagel, G. Haag, *Chaos, Solitons Fractals* **8** (1997) 1489.
- [110] K. Pyragas, *Phys. Lett. A* **170** (1992) 421.
- [111] W. Just, E. Reibold, K. Kacperski, P. Fronczak, J.A. Ho lyst, H. Benner, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 5045.
- [112] G. Chen, J. Lu, B. Nicholas, S.M. Ranganathan, *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** (1999) 287.
- [113] G. Feichtinger, in: G. Haag, U. Mueller, K.G. Troitzsch (Eds.), *Economic Evolution and Demographic Change*, Springer, Berlin, 1992.