Partea II

DEZVOLTAREA UNUI MODEL MATEMATIC SI REALIZAREA PROGRAMULUI DE SIMULARE NUMERICĂ PRIVIND CONTROLUL MANIFESTĂRII HAOTICE ÎNTR-O COLECTIVITATE MICRO-ECONOMICĂ SI CORELAREA COMPORTARII HAOTICE A MODELULUI CU COMPORTARILE HAOTICE SIMILARE DIN FIZICA

Cuprins:

- **Introducere**
- **Controlul manifestării haotice în fizică şi într-o colectivitate micro-economică**
  Stabilizarea Haosului în sistemele fizice
  Stabilizarea Haosului în sistemele economice
- **Modelul microeconomic Behrens-Feichtinger.**
- **Dezvoltarea modelului microeconomic**
  Analiza dinamicii neliniare a modelului microeconomic
  Controlul comportării haotice a modelului microeconomic – stabilizarea UPO.
- **Corelarea cu comportări haotice prezente în fizica laserilor**

Bibliografie

ANEXA I: Rutine MATLAB corespunzatoare programului de simulare dezvoltat

INTRODUCERE

Analiza empirică şi cercetarea teoretică privind deciziile economice, organizarea, comportarea şi schimbarea economico-socială sub toate aspectele, permit îmbunătățirea înțelegerii asupra modalităților în care cunoaşterea umană (cognitivă, informațională şi analitică) influențează activitatea structurilor economice şi sociale la scară micro şi macro-comportamentală. Înțelegerea relațiilor de graniță dintre economic-social şi celelalte ştiințe (fizică, matematică, biologie, fiziologie, psihologie, drept, antopologie, sociologie, etc...) joacă un rol deosebit de important astăzi, când tendințele de globalizare se resimt nu numai în domeniul schimbului economic şi informațional ci şi în acela al ştiințelor „fundamentale". Printre aceste eforturi relația dintre fizică şi economie-social a devenit privilegiată, a fost definită chiar o nouă ramură de cercetare *econo-fizica*, care abordează analiza fenomenelor economice din prisma teoretică comună atât a cercetătorilor din domeniul economico-socila cât şi a fizicienilor.

Este un lucru general acceptat că economia aparține clasei sistemelor complexe şi din punctul de vedere al fizicii trăsăturile dinamice fundamentale trebuie descrise atât prin modele deterministe cât şi prin modele stohastice, respectiv prin analiză statistică [1-4].

O credință acceptată de majoritatea cercetătorilor în teoria economico-financiară este aceea că seriile temporale ale prețurilor bunurilor sau fenomenelor economice sunt nepredictibile. Această credință este piatra de temelie a descrierii dinamicii prețurilor ca un proces stohastic. În fizică este recunoscut de multă vreme (începând cu anii 80) faptul ca seriile temporale ne-predictibile şi procesele stohastice nu sunt sinonime. În mod special, teoria haosului, a arătat că serii temporale nepredictibile se pot obține şi pentru sisteme deterministe neliniare. Rezultatele obținute în studiul sistemelor fizice şi biologice a declanşat un interes şi asupra studiului sistemelor economice, studii empirice şi teoretice au investigat dacă evoluția temporară a prețurilor bunurilor pe piețele financiare poate fi datorată fundamental unei dinamici neliniare deterministe a unui număr limitat de variabile.

Unul dintre scopurile cercetătorilor care studiază piața financiară folosind metodele dinamicii neliniare a fost acela de a reconstrui atractorul straniu ipotetic prezent în evoluția temporal haotică şi în a-i măsura dimensiunea. Reconstrucția atractorului fundamental şi a dimensiunii lui nu este o sarcină uşoară, probabil estimarea dimensiunii dă valori relativ

mari (mai mari ca şase). Pentru un astfel de sistem haotic este mai degrabă dificilă distincția dintre o evoluție haotică temporală şi un proces aleatoriu, în special dacă dinamica neliniară caracteristică este necunoscută. Ştim şi faptul că manifestări cu aparență stohastică, care pot trece majoritatea testelor de manifestare aleatoare, pot fi reproduse de către sisteme dinamice, deterministe, având însă un număr mare de grade de libertate. Dintr-un punct de vedere empiric, este dificil să discriminăm între ipoteza aleatoare şi cea haotică.

În general putem presupune că sistemele economice complexe pe care încercăm să le analizăm sunt compuse din ambele tipuri de manifestări, avem atât o componentă deterministă cât şi una aleatoare, stohastică, ponderea fiecărei componente fiind determinată de o multitudine de factori. În ultima vreme există din ce în ce mai multe dovezi privind evidențierea manifestărilor deterministe în activitățile economico-socilale, fapt care ne permite să modelăm anumite fenomene economice folosind o dinamică neliniară manifestă, şi pe baza datelor privind evoluția acestor modele, prin comparare cu evoluțiile din viața reală să îmbunătățim şi să adaptăm aceste modele.

Modelarea pieţelor financiare îşi găseşte aplicații directe provenind din teoria sistemelor haotice dar şi a sistemelor adaptive. Pieţele financiare sunt văzute ca sisteme evoluționiste la care iau parte diferite entități competitive având strategii de comerţ diferite. Agenții sunt considerați raționali în sensul că urmează strategii care s-au dovedit competitive în perioadele anterioare. Modelele evoluționiste pot explica fapte observabile de mare importanță precum cozile largi, gruparea volatilității (estimată ca deviația standard a modificărilor de preţ pe o anumită fereastră temporală) şi memoria de lungă durată (datorată prezenței corelațiilor la mare depărtare) a seriilor reale financiare [5-6].

CONTROLUL MANIFESTĂRII HAOTICE ÎN FIZICĂ ŞI ÎNTR-O COLECTIVITATE MICRO-ECONOMICĂ

Controlul unor procese economice şi sociale este fără doar şi poate unul dintre cele mai incitante sarcini pe care economiştii şi politicienii le pot avea. Controlul unor procese atât de complexe poate fi reevaluat la nivel ştiințific dacă se face apel la teoria controlului manifestărilor haotice [7-8].

Stabilizarea Haosului în sistemele fizice. Problema stabilizării unei comportări haotice a unui sistem fizic prin transformarea orbitelor in orbite periodice sau prin obținerea unei stări stabile este îndelung studiata atât de teoreticieni cat si de experimentatori. Avantajul folosirii atractorului haotic este acela ca prezintă o infinitate de orbite instabile diferite si deci asigura o larga gama de opțiuni in ce priveşte alegerea adecvata a parametrilor.

Cele mai folosite metode de reducere a haosului la orbite periodice se bazează pe: •determinarea direcțiilor stabile si instabile intr-o secțiune Poincaré; •proceduri de feedback autocontrolat; •introducerea unei mici modulații a parametrului de control; •cunoaşterea unei comportări dinainte definite.

În ceea ce priveşte metoda introducerea unei mici modulații a unui parametr de control, teoretic s-a obținut suprimarea haosului in dinamica diferitelor modele. De asemenea, controlul haosului cu ajutorul micilor modulații nu a fost demonstrat in general, anumite modele specifice arătând reducerea exponenților Lyapunov ceea ce conduce la stabilizarea soluțiilor periodice uşor instabile. Din punct de vedere experimental, s-a demonstrat ca micile modulații permit controlarea haosului in diferite sisteme dinamice cum ar fi sisteme magnetoelastice bistabile, circuite electronice sau laseri cu modularea pierderilor.

Hubler si Luscher [9] au propus stimularea rezonanței pentru controlul oscilatorilor neliniari. In acest caz, vectorul perturbatei s-a calculat ca diferența dintre dinamica dorita si dinamica sistemului liber. Aceasta metoda are avantajul ca se tine cont de informația conținută in sistemul neperturbat. Din nefericire, metoda nu poate fi uşor folosita deoarece in general anumite variabile nu sunt direct accesibile si introducerea coordonatelor întârziate ar fi greu de făcut in timp real. De asemenea dinamica impusa de aceasta metoda nu poate fi totdeauna implementata prin mici perturbații si sunt necesare corecții de acelaşi ordin cu semnalul principal.

Metodele de feed-back au la baza ideea de reintroducere in sistemul laser haotic a unei părți dintr-un parametru de control al sistemului. Aceasta metoda prezintă dezavantajul ca feed-back-ul este mai greu de obținut in sisteme haotice cu structuri complicate unde mult mai uşor de folosit sunt metodele de modulare.

Stabilizarea haosului folosind cuplajul dintre doua sisteme haotice se realizează prin sincronizarea oscilatorilor haotici neliniari folosind o mica parte din semnalul de ieşire a sistemului master care este injectată în sistemul slave. Aceasta metoda are importante aplicații in domeniul comunicațiilor unde sunt prezente câteva posibilități de folosire a haosului: „chaos masking”, „chaos modulation” si „chaos shift keying”. In primul caz, mesajul nu este codificat in semnalul purtător ci doar este adăugat acestuia, in timp ce in al doilea caz purtătoarea este modulata de mesaj. In ambele sisteme, intensitatea mesajului trebuie sa fie suficient de mica pentru a se evita detecția in domeniile de timp sau frecventa. In ultimul caz, chaos „shift keying” se bazează pe definirea a doua orbite haotice clar separate pentru bitii 1 si 0. Decodorul reprezintă copia sistemului de transmisie unde sunt configurate doua orbite separate pentru detecția biților 1 si 0. In aceasta metoda stabilizarea haosului se realizeaza prin cuplajul celor doi oscilatori master-slave, mesajul transmis putând fi decodificat datorita stabilizării orbitelor.

Stabilizarea Haosului în sistemele economice. Modele de control bazate pe metoda feedback-ului întârziat pot fi aplicate cu succes pentru a suprima haosul determinist în modelele micro-economice [10-11]. Plecând de la metoda OGY (Ott, Grebogi şi Yorke) care aplică observația că o soluție haotică are în imediata vecinătate un număr infinit de orbite periodice instabile. Cu toate că este bine acoperită din punct de vedere teoretic implementarea practică este limitată de faptul că toate mărimile necesare pentru a calcula valorile parametrilor de control ai sistemelor nu sunt date direct dintru-un lanț de date experimentale şi pentru a putea aplica un control trebuie să supunem sistemul unei analize complexe. Dar chiar şi aşa există abordări care arată modalitățile de aplicare ale metodei în cazul sistemelor microeconomice [12].

Pentru a exemplifica într-un mod simplu acest tip de control al unei manifestări haotice simple să apelăm la modelul consacrat al hărții logistice ce-şi are originea în modelul dinamicii densității de populație a unei specii în schimbarea ei anuală, model creat de P.F. Verhulst (1845), care este şi prototipul hărților haotice: $x(n+1)-x(n)=(4a-1)\cdot x(n)-4ax(n)^2$, unde parametrul a caracterizează evoluția populației. Putem să observăm prezența a doi termeni, primul o creştere liniară, prin „reproducere”

$$(4a-1)\cdot x = \begin{cases} < 0 \ for \ \text{a} < 1/4 \ \text{extinctie} \\ > 0 \ for \ a > 1/4 \ \text{crestere exponentiala} \end{cases}.$$

şi cel de al doilea termen o restricţie ne-liniară (prin limitarea resurselor de hrană), care previne o creştere nelimitată a populaţiei, $-4ax^2 < 0$. Modelul poate căpăta o formă mai compactă, $x_{n+1} = r \cdot x_n(1-x_n)$, unde parametrul r (parametru neliniar $r \in [0, 4]$) şi condiţiile iniţiale $x_0 \in [0, 1]$, reprezintă parametrii importanţi privind evoluţia „diâscretă" (anuală), a populaţiei modelate. În funcţie de valorile acestor parametrii sistemul poate evolua spre un punct fix, o traiectorie periodică sau una haotică. Dacă sistemul evoluează pe o traiectorie haotică, controlul asupra acestei evoluţii se poate realiza, ca şi în cazul majorităţii hărţilor iterative ce urmează orbite periodice instabile, prin aplicare unui feedback în variabila hărţii. Fie γ, procentul de populaţie care este controlată (prin modificarea lui x la fiecare Δn iteraţii), adică $x'_n = x_n(1+\gamma)$. Abilitatea de a controla în acest fel evoluţia haotică depinde critic de valoarea acestor doi parametrii (Δn fiind corelat cu periodicitatea principală a ciclului observat).

În figurile de mai jos prezentam evoluţia dinamică a modelului. In Figura 1 evoluţia haotică, fără feedback, pentru valorile parametrilor x_0=0.8 şi r=3.6. În Figura 2 se prezintă evoluţia modelului la care s-a aplicat feedback, γ=0.04 şi Δn=5, dar într-o perioadă anterioară stabilizării, sunt prezentate atât punctele evoluţiei dinamice libere, cu roşu, cât şi punctele modificate datorită aplicării unui feedback la fiecare Δn puncte, cu verde. În Figura 3 se prezintă cazul apropierii de zona de stabilizare, când sistemul tinde să iasă dintr-o evoluţie haotică spre una periodică, predictibilă. În Figura 3 se observă trecerea hărţii logistice cu control prin feedback activ dintr-o dinamică haotică într-o dinamică periodică, durata (numărul de iteraţii) după care poate apărea o astfel de manifestare depinzând de dinamica sistemului, de parametrii de control şi de parametrii de feedback, variind de la sute sau mii, la un numere foarte mari. În Figura 4 se observă revenirea sistemului la o dinamică haotică odată cu încetarea feedback-ului

Chiar dacă metoda este aplicată unei dinamici extrem de simple (harta logistică) ea prezintă pe deplin potenţele metodei de trecere a unui sistem dinamic dintr-o evoluţie haotică, impredictibilă pe termen lung decât prin mijloacele teoriei probabilităţilor, într-o evoluţie periodică, predictibilă. Se demonstrează astfel modul în care, chiar pentru sisteme

la care dinamica nu este cunoscută, se poate controla evoluția sistemului, în acest caz printr-o metodă de feedback activ, dezvoltată în fizică pentru multe procese.

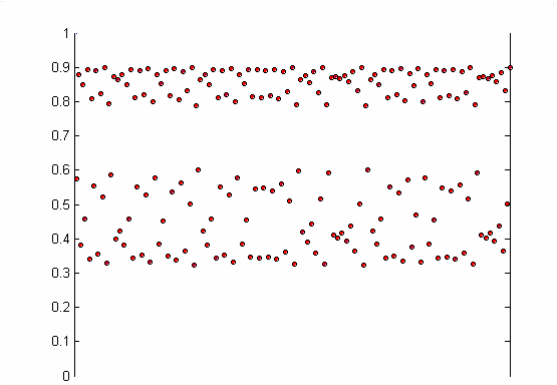


Fig. 1. Evoluția haotică a hărții logistice

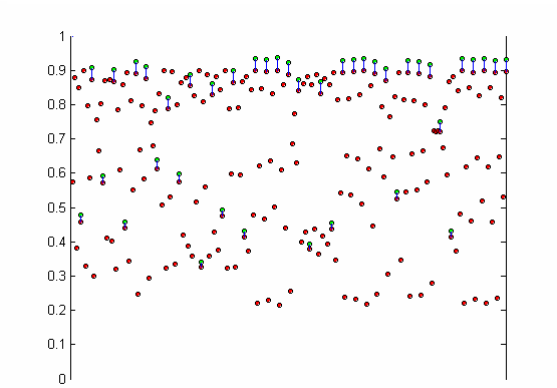


Fig. 2. Evoluția hărții logistice controlată prin feedback, înainte de stabilizare

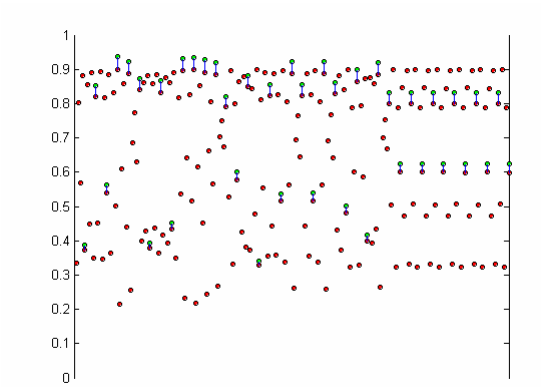


Fig. 3. Trecerea hărții logistice dintr-o dinamică haotică într-o dinamică periodică datorită feedback-ului

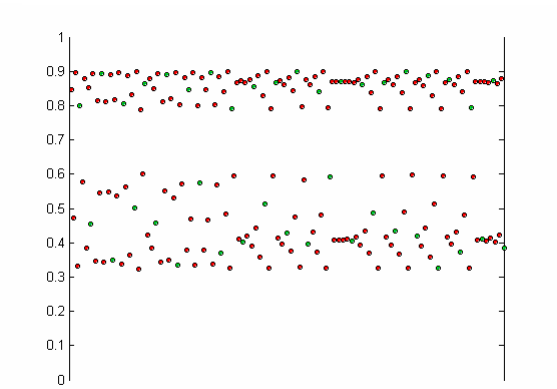


Fig. 4. Revenirea la o dinamică haotică odată cu încetarea feedback-ului

Spre deosebire de această metodă, Pyragas a introdus o modalitate de control a haosului pentru care cunoaşterea ecuațiilor de evoluție ale sistemului nu este necesară [10,13-14]. Dacă traiectoria unui sistem continuu temporal, **r***(t)*, sub influența unei forțe de control este

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{r}(t), k(t)),$$

şi în absența controlului (k≡0) perioada orbitelor periodice instabile este τ, atunci putem folosii ca forță stabilizatoare forța dată de:

$$k(t) := K\sum_{0}^{\infty} s_v \{g[\mathbf{r}(t-\tau v)] - g[\mathbf{r}(t-\tau(v+1))]\},$$

unde $g[\mathbf{r}(t)]$ este o mărime scalară şi poate fi obținută din măsurarea traiectoriei sistemului $\mathbf{r}(t)$, s_v fiind un parametru de control. Importanța metodei (*autosincronizarea prin feedback întârziat*) este aceea că parametrul de control poate fi făcut să tindă la zero atunci când sistemul atinge orbita dorită.

Diferite alegeri ale forței de control au fost folosite pentru varianta discretă temporal a problemei. Rezultatele analitice (bazate pe teoria Floquet) au arătat că limitările controlului sunt corelate cu numărul de multiplicități reale Floquet (corespunzând cu orbitele dorite) care sunt mai mari decât unitatea. În aceste tipuri de control prin feedback ale sistemelor s-au observat o serie de tipuri de bifurcații (inclusiv Hopf) [15].

MODELUL MICROECONOMIC BEHRENS-FEICHTINGER

O serie întreagă de modele „fizice" microeconomice au fost elaborate, dintre acestea unele relativ simple. Ca extensia la economie a modelului neliniar Richardson a cursei înarmărilor [16], pentru care controlul prin aplicarea forței stabilizatoare poate fi realizat în condiții optime [10], modelul Behrens-Feichtinger, se referă la două firme având strategii asimetrice de investiție.

Modelul se referă la evoluția vânzărilor (x_n şi y_n) a două firme competitive pe aceeaşi piață de bunuri (cu strategii de investiție asimetrică şi activă pentru ambele firme). Dacă o firmă nu investeşte, în publicitate, cercetare, re-tehnologizare şau dezvoltare este de aşteptat ca vânzările firmei respective să scadă exponențial, cu un factor ce caracterizează situația concretă de pa piață a firmei, şi fiecare firmă are posibilitatea să investească pentru a-şi creşte vânzările. Fiecare firmă are o abordare diferită a strategiei de investiție, firma X investeşte numai dacă are un avantaj asupra firmei Y, iar cealaltă firmă dor dacă are o poziție dezavantajoasă. Dacă firma X este mai mică şi nu investeşte – se comportă defensiv, iar firmaY, fiind mai mare, dacă este superioară competitorilor, nu investeşte nici ea– se comportă agresiv. Putem deci descrie o evoluția a vânzărilor celor două firme, într-o scală discretă de timp - x_n reprezentând valoarea vânzărilor firmei X la momentul n temporal – prin:

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \phi(x_n - y_n : a),$$

$$y_{n+1} = (1-\beta)y_n + \phi(x_n - y_n : b).$$

cu α şi β (0 < α, β < 1) fiind ratele temporale la care vânzările ambelor fire scad în absența investițiilor (scădere exponențială). Ideal funcția $\phi(x_n - y_n : a)$ este o funcție treaptă definită ca fiind zero pentru $x \le y$ şi egală cu a pentru $x > y$, dar funcția treaptă poate fi aproximată cu $\phi(x_n - y_n : a) = a\left(1 + \exp\left[-c(x_n - y_n)\right]\right)^{-1}$, unde c caracterizează panta trecerii de la 0 la a pentru funcție ($c \to \infty$ reconstituie funcția treapta), si măsoară gradul de neliniaritate.

DEZVOLTAREA MODELULUI MICROECONOMIC

Pentru a adapta modelul microeconomic la condiții de evoluție dinamică mai apropiate de condițiile reale vom introduce o serie de modificări care au ca scop dezvoltarea acestui model matematic şi extinderea aplicabilității sale.

- Pentru început propunem adăugarea unui termen aleator privind cunoaşterea diferenței dintre vânzările celor două firme, aşa cum se întâmplă în realitate, nu întotdeauna avem informația corectă despre vânzările firmei concurente, ci doar informații având un anumit grad de probabilitate. De aceea funcția neliniară ce modelează declanşarea alocării de fonduri către investiții o vom modifica folosind o variabilă aleatoare distribuită Gaussian $P_G(c,\sigma)$ (de medie c şi varianță σ^2), ce măsoară gradul de incertitudine privind cunoaşterea vânzărilor concurente,

  $$\phi(x_n - y_n : a) = a\left(1 + \exp\left[-P_G(c,\sigma)\cdot(x_n - y_n)\right]\right)^{-1}.$$

  Natura distribuției poate să nu fie Gaussiană, dar acest lucru va fi analizat ulterior. Termenul este echivalent cu *introducerea unui zgomot decizional privind momentul la care va avea loc o anumită investiție*.
- Valoarea investită poate fi de asemenea variabilă, modelată de asemenea printr-o distribuție Gaussiană, chiar dacă firma are o sumă prevăzută pentru investiții, valoarea acestei investiții nu este de fiecare dată identică, ea putând varia funcție de

strategia de promovare-dezvoltare aplicată la momentul respectiv, de oferta momentană a pieței, etc. Vom modifica deci constanta de investiție *a*, sau *b*, prin

$\phi(x_n - y_n : a) = P_G(a,\sigma) \cdot \left(1 + \exp\left[-c(x_n - y_n)\right]\right)^{-1}$,

Termenul fiind echivalent cu *introducerea unui zgomot în valoarea investițiilor*.

- Controlul haosului este în mod uzual legat de stabilizarea UPO-urilor (orbitelor periodice instabile). Acest lucru se face prin controlul parametrilor şi valorilor dinamicii sistemului astfel încât toți coeficienții Lyapunov să devină negativi, iar traiectoria sistemului să devină periodică. Vom aborda un nou punct de vedere care se referă la posibilitatea de „control haotic" astfel încât *sistemul să rămână într-o dinamică impredictibilă, haotică, dar media variabilei de interes să poată fi controlată*, astfel încât profitul firmei să poată fi îmbunătățit. Acest lucru poate fi realizat, cel puțin teoretic, din analiza dinamicii sistemului, prin modificarea parametrilor de control astfel încât centrul „orbitei" traiectoriei să se deplaseze controlat.
- Într-un model al pieței mai realist ar trebui ținut seama de existența pe piață a unui număr mai mare de comercianți, presupunând că *toți aceşti agenți au ca obiect de activitate aceeaşi piață de produse similare* (sau servicii) şi că pot fi separați, ideal - într-o oarecare măsură, de restul sistemului economic. Cuplarea mai multor comercianți, fiecare având o dinamică de evoluție similară, caracterizată de:

  $x_{n+1}^m = (1-\alpha^m)x_n^m + \phi(V - \sum_m x_n^m, a^m, c)$, $m = 1,2...M$

  unde indicele superior face referire la agentul comercial, pe piață fiind M astfel de agenți. Cuplarea se face prin termenul $V - \sum_m x_n^m$, presupunând că piața este o piață cu cerere „fixă" sau lent variabilă, V reprezentând valoare cererii întregii piețe pentru portofoliul de produse-servicii considerate. Desigur, într-un model mai elaborat, valoarea acestei mărimi va putea depinde de suma investițiilor agenților comerciali (prin generarea şi condiționarea interesului pentru produse...), de mărimi care să vină din exteriorul sistemului considerat, creşterea sau scăderea puterii de cumpărare, a oportunităților sau modificarea legislației, etc.

Analiza dinamicii neliniare a modelului microeconomic

Interesant de arătat că în funcție de valoarea coeficientului c avem de a face cu diferite evoluții temporale ale sistemului, în Figura 5 fiind reprezentat arborele cu bifurcații realizat pentru cazul $a = 0.2; b = 0.8; \alpha = 0.45; \beta = 0.8$, reprezentând domeniul de valori posibile pe care le poate lua variabila X funcție de modificarea coeficientului c.

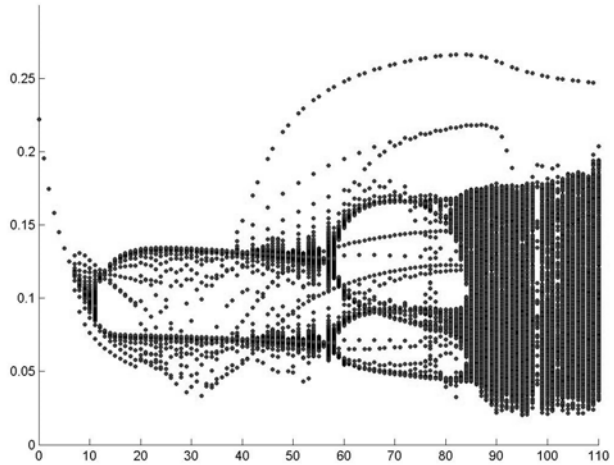


Fig. 5. Arborele cu bifurcații realizat pentru variația coeficientului funcției „treaptă” $\boxed{R1}$

Se observă că o manifestare haotică este condiționată de valori mari ale coeficientului c, ceea ce înseamnă o pantă mare a funcției treaptă!

Expresiile care vor definii dinamica neliniară a modelului microeconomic sunt:

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \frac{a}{1+\exp[-c(x_n - y_n)]}$$

$$y_{n+1} = (1-\beta)y_n + \frac{b}{1+\exp[-c(x_n - y_n)]}$$

unde a, b şi c sunt parametrii de investiție (constante pozitive). Termenul neliniar descrie influența investiției la timpul n asupra vânzărilor la timpul (n+1). În figura de mai jos este prezentată evoluția temporală a vânzărilor firmei X, pentru setul de coeficienți de mai sus, pentru $c = 100$

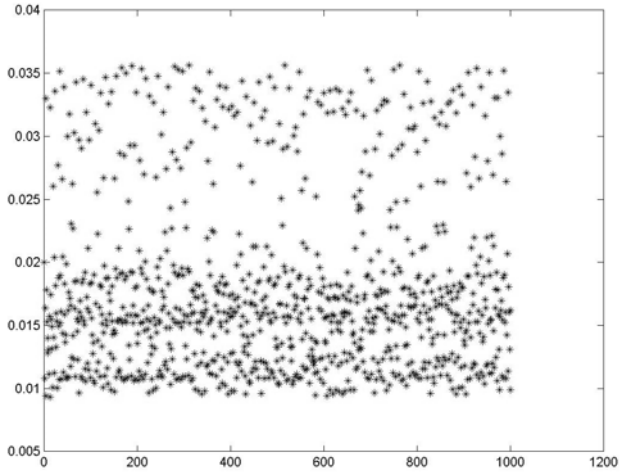


Fig. 6. Seria temporală haotică, discretă, a vânzărilor firmei X. $\boxed{R2}$

O altă serie de informații pot fi obținute din analiza traiectoriei dinamice a sistemului în spațiul stărilor (fazelor). În figura de mai jos prezentăm, pentru aceeaşi parametrii şi valori inițiale evoluția traiectoriei necontrolate, care este 2D datorită numărului de variabile libere.

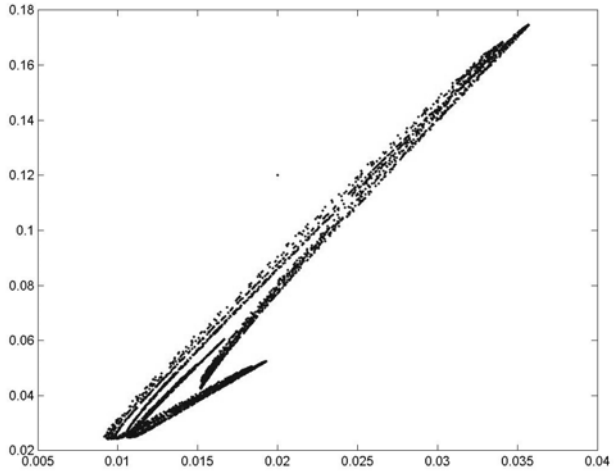


Fig. 7. Evoluția în spațiul fazelor pentru sistemul necontrolat $\boxed{R2}$

În analiza dinamicii sistemului o altă caracteristică importantă este acea a poziției punctelor fixe, punctele de inițializare ale stării sistemului pentru care traiectoria în spațiul fazelor este punctuală, sistemul îşi conservă valorile variabilelor. Un calcul sumar arată o valoare a punctelor fixe $\hat{x} = 0.01182215476883$; $\hat{y} = 0.04369975066334$, pentru parametrii prezentați mai sus. Existența dinamicii haotice este încă odată pusă în evidență de evoluția temporară a variabilelor X şi Y, vezi figura de mai jos, unde datorită limitărilor în precizia

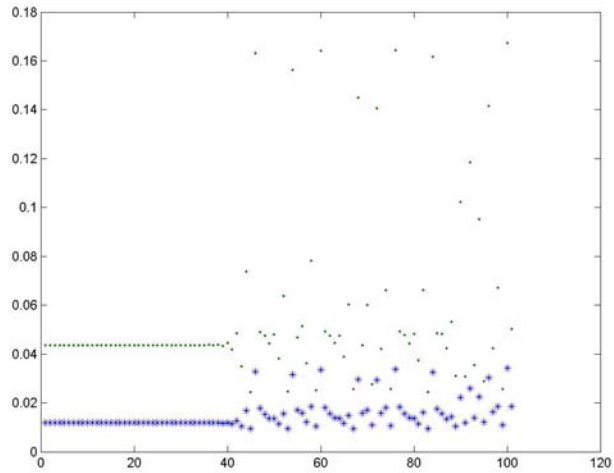
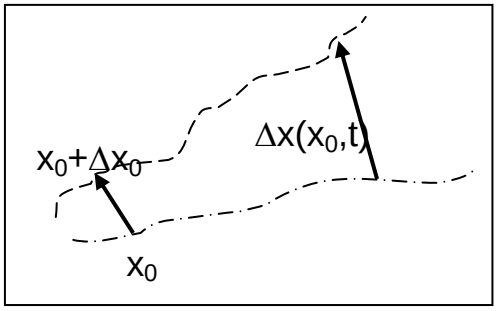


Fig. 8. Evoluția variabilelor X şi Y în apropierea punctelor fixe $\boxed{R3}$

calculelor, punctele fixe găsite sunt *aproximative*, traiectoria temporară redevenind haotică după un număr de paşi temporari datorită abaterii acestora de la valoarea exactă şi dependenței exponențiale a traiectoriilor haotice de valorile inițiale.



Predictibilitatea haosului este limitată în ultimă instanță de puternica dependența a traiectoriilor viitoare de condițiile inițiale.

Să ne referim la calculul coeficientului Lyapunov care se referă la modul în care două traiectorii inițial adiacente, separate de un interval infinitezimal, se separă în timp, $\Delta x(x_0,t) \approx \Delta x_0 \cdot \exp(\lambda t)$, adică

$\lambda = \lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ \Delta x_0 \to 0}} \frac{1}{t} \ln\left|\frac{\Delta x(x_0,t)}{\Delta x_0}\right|$. Dacă se cunoaşte modul de modelare ala datelor cu anumite ecuații, putem calcula *coeficientul Lyapunov local* folosind definiția sa: $\exp(\lambda) = |\Delta X_1 / \Delta X_0|$. Dacă avem două puncte inițiale separate prin ΔX_0, X_0 şi $X_0 + \Delta X_0$, şi o hartă 1D, $X_{n+1} = f(X_n)$, atunci după o iterație separarea dintre cele două traiectorii va deveni $\Delta X_1 = f(X_0 + \Delta X_0) - f(X_0) \cong \Delta X_0 \cdot df/dx|_{X_0} = \Delta X_0 \cdot f'(X_0)$ şi deci $\lambda = \ln|\Delta X_1 / \Delta X_0| \cong \ln|f'(X_0)|$. Iar *coeficientul Lyapunov global* prin mediere pe multe iterații $\lambda = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|f'(X_N)|$. În cazul 2D, $X_{n+1} = F(X_n, X_n); Y_{n+1} = G(X_n, X_n)$, atunci când condițiile inițiale sunt separate de ΔR infinitezimal ($(\Delta R)^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2$), şi după

o iterație traiectoriile sunt separate de $\Delta X_1 = \Delta X_0 \cdot F'_X(X_0) + \Delta Y_0 \cdot F'_Y(X_0)$ şi $\Delta Y_1 = \Delta X_0 \cdot G'_X(X_0) + \Delta Y_0 \cdot G'_Y(X_0)$, (derivatele parțiale...) şi definim *cel mai mare exponent Lyapunov*: $\lambda_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left|\Delta R_{n+1}/\Delta R_n\right|$,

adică $\lambda_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left|\frac{\left(F'_X + F'_Y Y'_n\right)^2 + \left(G'_X + G'_Y Y'_n\right)^2}{1 + Y'^2_n}\right|$, cu $Y'_n = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ este tangenta direcției creşterii maximale (vectorul tangentă), care evoluează conform $Y'_{n+1} = \frac{G'_X + G'_Y Y'_n}{F'_X + F'_Y Y'_n}$ şi este independent de Y'_0 după multe iterații, deoarece oricare două condiții inițiale se vor orienta pe direcția întinderii maxime. Aici λ_1 *semnifică coeficientul Lyapunov de-a lungul direcției maxime de separare a traiectoriilor – primul coeficient Lyapunov*.

În decursul iterațiilor paralelogramul condițiilor inițiale ($\Delta X_0, \Delta Y_0$) se distorsionează tipic prin alungirea (creşterea separării traiectoriilor) cu preponderență a unei direcții. Aria paralelogramului scade, iar el devine mai comprimat, cu direcția comprimării schimbându-se la fiecare iterație. Această comportare a spațiului stărilor (micşorarea volumului şi alungirea...) se datorează termenilor din afara diagonalei matricei Jacobian $\begin{pmatrix} F'_X & F'_Y \\ G'_X & G'_Y \end{pmatrix}$, F'_Y şi G'_X. Pentru a calcula aria paralelogramului după prima iterație să observăm că aria paralelogramului, în cazul în care termenii din afara diagonalei matricei Jacobian sunt nuli (nu se deformează, aria dreptunghiului maximal), este $A_1 = \Delta X_1 \Delta Y_1 = a\Delta X_1 b\Delta Y_1 = abA_0$, iar regiunea goală are aria $b\Delta Y_0 c\Delta X_0$, astfel încât aria ce rămâne paralelogramului este $A_1 = (ad - bc)A_0$, determinantul Jacobian-ului, si deci raportul expandării ariei este $A_1/A_0 = \left|\det(J)\right|$. Descriind paralelogramul în termenii direcției de maximă separare a traiectoriilor λ_1, şi a *direcției perpendiculare pe aceasta*, λ_2 în 2D ... şi λ_3 în 3D, – *al doilea coeficient Lyapunov*, în acest sistem de coordonate rotit $A_1/A_0 = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2}$, adică $\lambda_1 + \lambda_2 = \ln\left(A_1/A_0\right) = \ln\left|\det(J)\right|$, care generalizează în dimensiuni mai mari suma coeficienților Lyapunov (este logaritmul expansiunii raportului hiper-volumului) – a nu se

uita că $\det(J)$ variază pe orbită şi dă *suma coeficienților locali Lyapunov*. Suma exponenților globali se obține prin medierea $\ln|\det(J)|$ de-a lungul orbitei. Expansiune globală a ariei nu poate să fie pozitivă pentru o orbită mărginită, dacă sistemul are un atractor atunci expansiunea trebuie să fie negativă, corespunzând cu o contracție a condițiilor inițiale pe atractor. Cunoscând determinatul Jacobian-ului şi primul coeficient Lyapunov se poate dermina uşor, pentru cazul 2D, din $\lambda_1 + \lambda_2 = \ln|\det(J)|$ al doilea coeficient Lyapunov.

Pentru a determina dacă un sistem este haotic este suficient să se determine cel mai mare coeficient Lyapunov (λ_1), dacă se doreşte estimarea predictabilității medii este nevoie de toți coeficienții pozitivi, altfel este nevoie de întreg *spectrul de exponenți Lyapunov*.

Pentru *calculul numeric a celui mai mate exponent Lyapunov* (în orice dimensiune) trebuie să evaluăm numeric derivata de-a lungul direcției de maximă expansiune şi să-i mediem logaritmul de-a lungul traiectoriei: $\boxed{1}$ alegem condițiile şi separarea inițială în orice direcție, $\mathbf{R}_0$ şi $\Delta\mathbf{R}_0$ (mărimea vectorului $\Delta\mathbf{R}$, ΔR_0 trebuie să fie mult mai mică decât scala schimbării curgerii dar de câteva ordine de mărime mai mare decât precizia numerică); $\boxed{2}$ iterăm un pas temporal şi determinăm $\mathbf{R}_1$ şi $\Delta\mathbf{R}_1$, prima orbită neperturbată şi a doua cea perturbată; $\boxed{3}$ modificăm poziția celei de a doua traiectorii de la $\mathbf{R}_1 + \Delta\mathbf{R}_1$ la $\mathbf{R}_1 + (\Delta R_0 / \Delta R_1)\Delta\mathbf{R}_1$, pentru a menține orbitele apropiate (la ΔR_0) pe măsură ce lăsăm direcția să se orienteze pe cea a maximului expansiunii; $\boxed{4}$ adăugăm mărimea $\lambda_1 = \ln(\Delta R_n / \Delta R_o)$ la o medie dinamică de-a lungul traiectoriei şi sărim la pasul $\boxed{2}$ până când media pare să conveargă. Dacă sistemul este o curgere, se împarte media rezultată λ_1 la pasul temporal *h* astfel încât unitățile să fie cele corecte.

Dacă avem acces doar la datele directe putem folosii metoda numerică de mai sus cu modificarea că în loc să perturbăm orbita (ΔR), căutăm în seria temporală punctele apropiate în spațiul stărilor ale căror orbite le-am urmărit pentru câțiva paşi temporali sau până ele se separă prea mult, când alegem alte puncte apropiate, dar în aceeaşi direcție [17]. Algoritmul presupune divergența exponențială dar nu o verifică şi deci nu poate distinge haosul de zgomot. O altă metodă este aceea de a înainta prin seria temporală căutând cel mai apropiat punct X_l de fiecare punct X_n din spațiul împachetat temporal m-dimensional,

după care mediem logaritmului ratei de separație a acestor două puncte pe următorii k paşi temporali [18]. Cel mai mare coeficient Lyapunov este dat de $\lambda_1 = dL_k / dk$, la valori intermediare ale lui *k* (valorile mici ale lui k deoarece punctele nu s-au aliniat pe direcția expansiunii maxime, iar cele mari deoarece se pot apropia de dimensiunea atractorului şi să cauzeze deviații de la exponențială), aici

$$L_k = 0.5/(N-k-m+1)\sum_{n=m}^{N-k}\log\sum_{j=0}^{m-1}(X_{l-j+k} - X_{n-j+k})^2$$

În principiu putem distinge prin această metodă haosul de zgomotul $1/f^{\alpha}$, unde coeficientul Hurst este $H = (\alpha - 1)/2$ (vezi analiza R/S), şi ar trebui să avem $e^{L_k} \propto k^H$, adică panta $dL_k / dk = H / k$ nu ar trebui să fie constantă, față de cazul haosului unde panta graficului $L_k(k)$ ar trebui să fie constantă (o regiune substanțială de proporționalitate $L_k \propto k$ trebuie să fie evidentă în cazul haosului).

Este foarte importantă cunoaşterea sau estimarea coeficienților Lyapunov deoarece de valoarea lor depinde modul de evoluție a sistemului:

• λ < 0: indică *comportare convergentă* către un atractor stabil sau un singur punct fix

• λ > 0: indică *comportare haotică,* deviațiile inițiale cresc exponențial şi sistemul este foarte *sensibil la condițiile inițiale*

• λ = 0: indică stabilitate marginală. Valorile lui r cu →λ 0: marchează *puncte de bifurcație* unde un atractor devine instabil şi este înlocuit de unul cu perioadă dublă

• λ → - ∞: exponent divergent marchează *orbite superstabile* în care deviațiile (apropiate atractorului) dispar extrem de rapid

Coeficient Lyapunov pentru modelul microeconomic, se calculează plecând de la funcțiile de iterație ale hărții

$$F(x,y) = (1-\alpha)x + a\left(1+\exp\left[-c(x-y)\right]\right)^{-1}$$

$$G(x,y) = (1-\beta)y + b\left(1+\exp\left[-c(x-y)\right]\right)^{-1})$$

şi este întotdeauna posibil să se scrie o hartă D-dimensională în termenii unei hărți 1D, proiecția traiectoriei pe axa de observație, folosind termeni întârziați ai observabilei, dar în general numărul termenilor întârziați depăşesc D).

Matricea Jacobiană (cazul sistemului fără control, de dimensiune 2) este

$$J=\begin{pmatrix}\partial F/\partial x & \partial F/\partial y\\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y\end{pmatrix}_{x=x^*,y=y^*}\overset{not}{=}\begin{pmatrix}F'_X & F'_Y\\ G'_X & G'_Y\end{pmatrix}$$

$$F'_X=(1-\alpha)+ac\left(1+\exp\left[-c(x-y)\right]\right)^{-2}\exp\left[-c(x-y)\right]$$

$$F'_Y=-ac\left(1+\exp\left[-c(x-y)\right]\right)^{-2}\exp\left[-c(x-y)\right]$$

$$G'_X=-bc\left(1+\exp\left[-c(x-y)\right]\right)^{-2}\exp\left[-c(x-y)\right]$$

$$G'_Y=(1-\beta)+ac\left(1+\exp\left[-c(x-y)\right]\right)^{-2}\exp\left[-c(x-y)\right]$$

De exemplu, pentru setul de valori inițiale şi ale coeficienților (cu $X_0=Y_0=Y'_0=0$) $\mathrm{a}=0.16;\mathrm{b}=0.9;\mathrm{c}=105;\alpha=0.46;\beta=0.7$, coeficientul $\lambda_1=0.3437$ şi ştiind valoarea determinantului $\det(J)=$-0.97536, găsim valoarea celui de la doilea coeficient $\lambda_2=$-0.3686.

În figurile de mai jos sunt prezentate suprafețele de evoluție a valorilor acestor doi coeficienți, pentru setul de coeficienți listați mai sus, pentru condiții inițiale $X_0,Y_0\in(0,1)$, şi $Y'_0=0$.

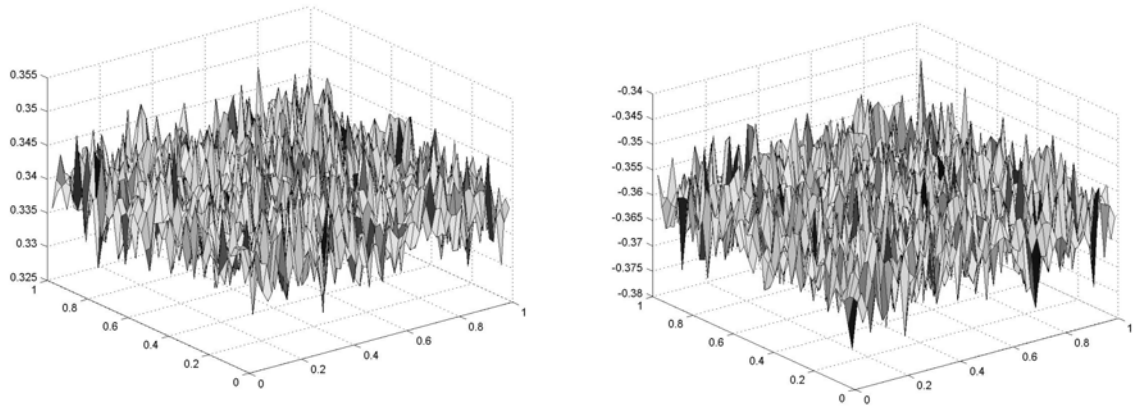


Fig. 9. Suprafețele de evoluție a valorilor coeficienților Lyapunov 1 şi 2 pentru sistemul „liber” $\boxed{R4}$

Se observă că valoarea principalului coeficient Lyapunov este pozitivă, implicând o comportare haotică, indiferent de valorile inițiale de pornire ale iterațiilor. Dintr-o analiză similară, funcție de valorile coeficienților, se determină condițiile pentru apariția haosului, care sunt $\alpha\le\beta;\ a\le b$.

Controlul comportării haotice a modelului microeconomic – stabilizarea UPO.

Un control al pieței, realizat de firma Y, se poate realiza datorită unei modificări propice a strategiei de investiție, prin adăugarea unei "forțe de control"

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \frac{a}{1+\exp[-c(x_n - y_n)]} = F_x(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = (1-\beta)y_n + \frac{b}{1+\exp[-c(x_n - y_n)]} + K(y_n - y_{n-m}) = F_y(x_n, y_n) + K(y_n - y_{n-m})$$

Mdificarea parametrului de control K induce modificări substanțiale în evoluția pieței, sistemul comută între comportări haotice şi periodice.

Controlul haosului este legat de stabilizarea UPO-urilor (orbitelor periodice instabile), trebuie deci ca exponentul Lyapunov a orbitei stabilizate să fie schimbat într-un asemenea mod astfel încât toți coeficienții Lyapunov să devină negativi! Trebuie remarcat faptul că Jacobianul sistemului controlat, J_K, este o matrice care are dimensiunea D mai mare întotdeauna decât dimensiunea Jacobianului sistemului necontrolat. Faptul este legat de apariția unui gard de libertate suplimentar ca efect al forței de control. Astfel dinamica sistemului se modifică conform

$$x_{n+1} = F_x(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = F_y(x_n, y_n) + K(y_n - y_{n-m})$$

$$z_{n+1} = y_n$$

unde m reprezintă întârzierea față de care se raportează forța de control, sistemul trecând în acest caz într-o manifestare 3D şi nu 2D.

Să considerăm de exemplu cazul prezentat în figura de mai jos, unde sistemul, caracterizat de $a = 0.16; b = 0.9; c = 105; \alpha = 0.46; \beta = 0.7$, este trecut din stări necontrolate, haotice, în stări controlate, periodice.

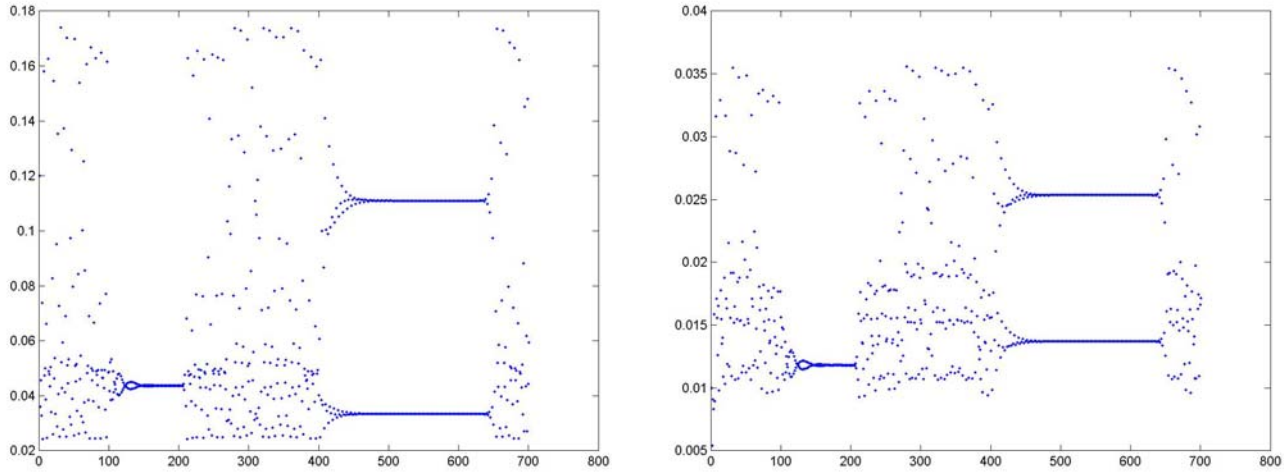


Fig. 10. Evoluția temporală a modelului microeconomic controlat, vânzările celor două firme, Y şi X $\boxed{R5}$

Inițial sistemul evoluează pe o orbită haotică, având o medie a vânzărilor realizate de firma Y de $m1 = 0.065$. Apoi firma Y comută pe control, cu parametrii K=0.5, m=1, şi sistemul atinge rapid o orbită fixă, piața este stabilizată pe o orbită de perioadă unu (vânzările ambelor firme sunt fixate pe o constantă, sub valoarea medie a vânzărilor, $m2 = 0.0438$ corespunzând pieței necontrolate). În acest caz controlul este dezavantajos, implicând o scădere a vânzărilor. Firma Y lasă din nou piața liberă, sistemul trece din nou pe o orbită haotică, cu o medie a vânzărilor $m3 = 0.0649$ apropiată de cazul inițial, după care sistemul devine din nou controlat, de data asta cu parametrii K=-0.1, m=2, sistemul trecând de această dată pe o orbită cu perioadă (deoarece şi m=2), având o medie a vânzărilor de $m4 = 0.0721$, mai mare ca în cazul necontrolat. În general, posibilitatea controlului haosului depinde de alegerea variabilei sistem folosită şi de timpul de întârziere (m), se impune deci o analiză teoretică efectuată asupra dinamicii sistemului.

Controlul pieței introdus de firma *Y* impune stabilizarea întregului sistem, interesant este faptul ca şi vânzările *X* devin periodice. În cazul controlului cu o perioadă dublă de întârziere, m=2, K=–0.1, vânzările firmelor oscilează periodic între două valori, valoarea medie a vânzărilor fiind mai mare decât valoarea corespunzătoare a pieței necontrolate. Acest efect este realizat pe cheltuiala celorlalte firme ce acționează pe piață.

Important este de arătat este faptul că Controlul este local în timp - valoarea forței de control tinde la zero după trecerea sistemului în starea dorită.

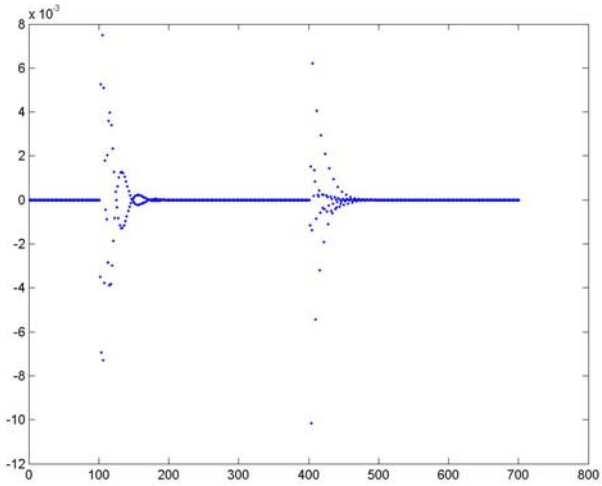


Fig. 11. Evoluția temporală a „forței” de control, realizată de firma Y, asupra sistemului $\boxed{R5}$

Controlul prin feedback întârziat corespunde unei posibile comportări a unei firme care îşi modifică politica luând în considerare valori ale veniturilor sau vânzărilor prezente şi trecute, şi pe cele ale unei firme competitoare.

Este de subliniat posibilitatea de control ce se poate realiza şi prin controlul altor parametrii [7], de exemplu prin descreşterea dimensiunilor investițiilor, $K(y_n - y_{n-m}) \to Min[0, K(y_n - y_{n-m})]$, prin modificarea parametrilor funcționali ai sistemului, $b \to b + K(y_n - y_{n-m})$, sau prin folosirea a mai multor temeni de control întârziat, $K(y_n - y_{n-m}) \to K_1(y_n - y_{n-1}) + K_2(y_n - y_{n-2})$.

CORELAREA CU COMPORTĂRI HAOTICE PREZENTE ÎN FIZICA LASERILOR

Dinamica haotică a modelului permite realizarea de apropieri cu manifestări similare din fizică, alegând aici discuția manifestărilor haotice care apar în cazul unei diode laser cu cavitate extinsă, care funcționează multimod sau monomod, şi asupra căreia se poate intervenii prin modificarea parametrilor de control ai sistemului, curentul de injecție, coeficientul de cuplaj al cavității exterioare, sau lungimea cavității exterioare, ca şi prin modularea curentului de injecție sau a luminii re-injectate în cavitatea interioară, realizându-se în acest fel un control al manifestării haotice a sistemului, trecerea sa dintr-o dinamică impredictibilă, la o dinamică cunoscută [19-21].

Modelarea acestui sistem are ca punct de plecare ecuațiile Lang-Kobayashi, aceste ecuații sunt considerate în general ca fiind o aproximare validă a modului de operare a unui

laser cu semiconductori operând mono-mod şi având un feedback moderat.

Plecam de la sistemul de ecuaţii de rata diferenţiale Lang-Kobayashi [22], care modelează emisia câmpului complex emis de dioda laser monomod cu cavitate exterioara ($E_m(t)e^{-i\omega_m t} = |E_m(t)|e^{-i(\omega_m t+\Phi_m(t))}$), acesta are o comportare data de [23-24]:

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = (1-i\alpha)\left(G_m(t) - \frac{1}{\tau_p}\right)\frac{E_m(t)}{2} + \gamma_m E_m(t-\tau)e^{i\omega_m\tau} + k_m E_{ext} + \sqrt{2\beta_m N(t)}\xi_m(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{I}{e} - \frac{1}{\tau_s}N(t) - \sum_m G_m(t)|E_m(t)|^2 \text{ şi } G_m(t) = \frac{g(N(t)-N_o)}{(1+s_m|E_m(t)|^2)}\left[1-(m-m_c)^2\left(\frac{\Delta\omega_l}{\Delta\omega_g}\right)^2\right]$$

unde modul singular longitudinal are frecventa unghiulară de oscilaţie (operare in mod continuu) ω, τ reprezintă timpul de propagare in cavitate exterioara care are un coeficient de întoarcere pentru câmpul re-injectat in cavitate $\gamma = \frac{1-R}{\tau_i\sqrt{R}}\sqrt{\eta} = \frac{K_{ext}}{\tau_i}$, k_{ext}=0.02…0.6. Frecventa unghiulara a modului m a laserului solitar este: $\Omega_m = \omega_0 + (m-m_c)\Delta\omega_l$, $m = 0,\pm1,\pm2,\pm3...M$, m_c numărul modului central iar M numarul total de moduri active. Spaţierea modurilor longitudinale este data de $\Delta\omega_l = \frac{2\pi}{\tau_i}$ şi frecventa de oscilaţie instantanee a modului m este $\omega_m = \Omega_m + \frac{\partial\Phi_m}{\partial t}$. Termenul complex de emisie aleatoare spontana ξ este presupus un zgomot alb necorelat Gaussian $\langle\xi_m,\xi_n\rangle = \delta_{mn}$, cu medie zero si rata de emisie spontana β. Presupunem de asemenea ca factorul de putere cuplata de cavitatea exterioara este acelaşi pentru toate modurile, $\gamma_m \leftrightarrow \gamma$, si ca nu exista corelaţie intre modurile reinjectate, de asemenea pentru cazul unui feedbck selectiv, pe un singur mod, n, $\gamma_m = k_{ext}\delta_{mn}$. $\Delta\omega_g$ (2π·4.7 THz) este banda câştigului materialului laser.

Desigur, cel puţin din punct de vedere formal, dinamica prezentă de acest model este mai „complicată” decât dinamica prezentată de modelul microeconomic, dar să nu uităm că folosind anumite schimbări de variabile, şi fixând anumiţi parametrii ai sistemului, ecuaţiile care descriu această dinamică se reduc la sisteme mai compacte, nu cu mult deosebite de dinamica modelului microeconomic cu un număr oarecare de agenţi.

Primul lucru care ar fi de remarcat ar fi acela al existenței unui număr de moduri longitudinale active simultan, echivalentul agenților din modelul microeconomic, formal prezentate de oscilatori haotici având ecuații dinamice simulare, dar cu coeficienți diferiți (care îi separă ca şi comportament), acționând toți pe acelaşi sistem fizic, competitivi în sensul că toate modurile (oscilatorii haotici) sunt cuplate având aceeaşi sursă de "hrănire" (curentul injectat) şi fiind sub aceleaşi condiții de feed-back, similar agenților economici care sunt competitivi pe o piață relativ fixă, cu variații relativ lente ale capitalului total circulat, toți aflându-se în condițiile aceleiaşi dinamici globale.

Desigur, ca şi în sistemul laser putem avea doar două firme (moduri) „active", sau un număr relativ mare de firme concurente. Ca şi în cazul emisiei laser, putem controla dinamica haotică, fir prin controlul feed-back-ului fie prin modularea unui anumit parametru, realizându-se în ambele cazuri o estimare viitoare a evoluției dinamice a sistemului.

Să vedem câteva dintre evoluțiile sistemului laser şi modul în care acestea ar putea avea un corespondent în sistemul microeconomic analizat.

În cazul sistemului laser solitar, care evoluează monomod, fără cuplaj cu un alt sistem laser, evoluția dinamicii haotice este drastic influențată de valorile parametrilor, ca şi în cazul dinamicii modelului microeconomic, şi poate evolua pe o orbită fixă, pe o traiectorie haotică slab sau înalt haotică (vezi Figura 11)

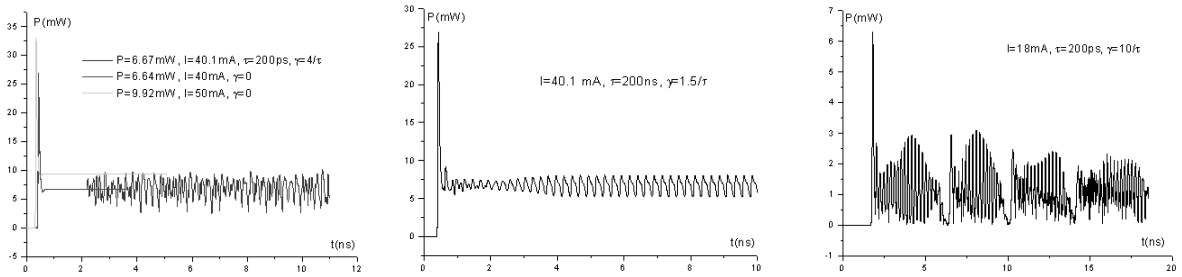


Fig. 11. În funcție de parametrii de control sistemul laser poate evolua pe: a) orbite fixe sau înalt haotice, b) stări haotice joase sau c) stări de înaltă dimensiune haotică – fluctuațiile de înaltă frecvență, în apropierea criticalității

O situație interesantă, care poate avea o echivalență într-o aplicație asupra modelului microeconomic este modul de funcționare a două sisteme (laser) monomod identice cuplate, unul – master, evoluând ca în cazul figurii 12 într-un punct fix (emisie

continuă - nehaotică) şi celălalt – slave funcţionând pe o orbită haotică. În funcţie de gradul de „control” (factor de cuplaj) sistemul master îşi impune evoluţia proprie asupra sistemului slave, dacă controlul este puternic, slave-ul îşi părăseşte propria orbită haotică şi urmează în traiectoria masterului, important de remarct că acest lucru este valabil şi dacă masterul are el însuţi o traiectorie haotică diferită de cea a slave-ului. Dacă puterea controlului scade slave-ul trece prin stări haotice joase spre starea sa caracteristică, atinsă la o valoare suficient de mică a influenţei exterioare.

O altă modalitate de control a traiectoriei haotice a unui sistem, laser în acest caz, este modularea unui parametru de control al sistemului. Acestă modulare se poate realiza prin controlul curentului injectat în dioda laser sau prin modularea electro-optică, de fază, a luminii re-injectate din cavitatea exterioară. Foarte interesantă este manifestarea de rezonanţă, care apare în acest caz, spre deosebire de rezonanţa anterioară, master-slave la care starea rezonantă reproducea starea de referinţă, în acest caz, modularea exterioară

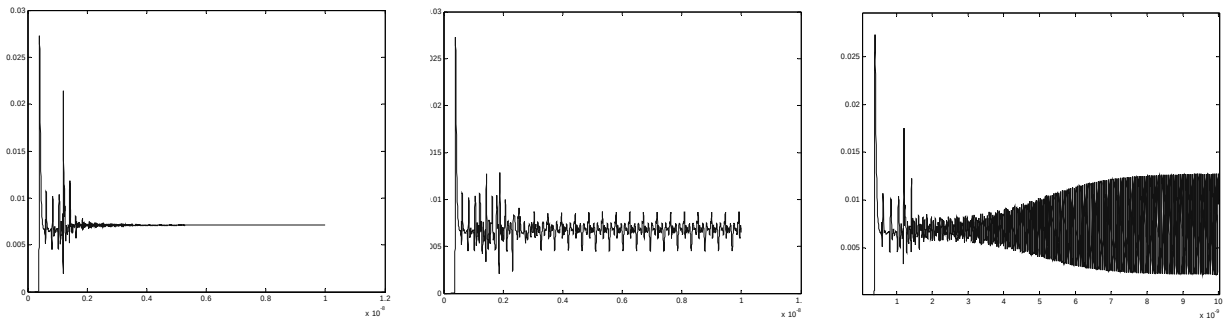


Fig. 12. În funcţie de parametrul de cuplaj master-slave, emisia slave-ului este influenţată în mod dramatic de controlul master-ului (de la stânga spre dreapta mărimea factorului de cuplaj scade)

(sinusoidală de diferite frecvenţe) induce în sistem răspunsuri sincrone (vezi Figura 13) dar nu identice cu dinamica controlului. Se produce o modificare evidentă a dinamicii sistemului, care trece dintr-o evoluţie de tip fluctuaţii de joasă frecvenţă, LFF, la limita criticalităţii, într-o manifestare controlată, similară ca formă exterioară, dar cu frecvenţe ale căderilor de putere ce caracterizează LFF, care sunt într-o relaţie de raport de numere întregi cu frecvenţa modulatoare. Această sincronicitete a manifestărilor nu se produce pentru orice frecvenţă modulatoare, ci doar pentru anumite, în apropierea acestora sistemul având comportări ce arată tendinţa de cuplare a traiectoriilor (vezi figura de mai jos).

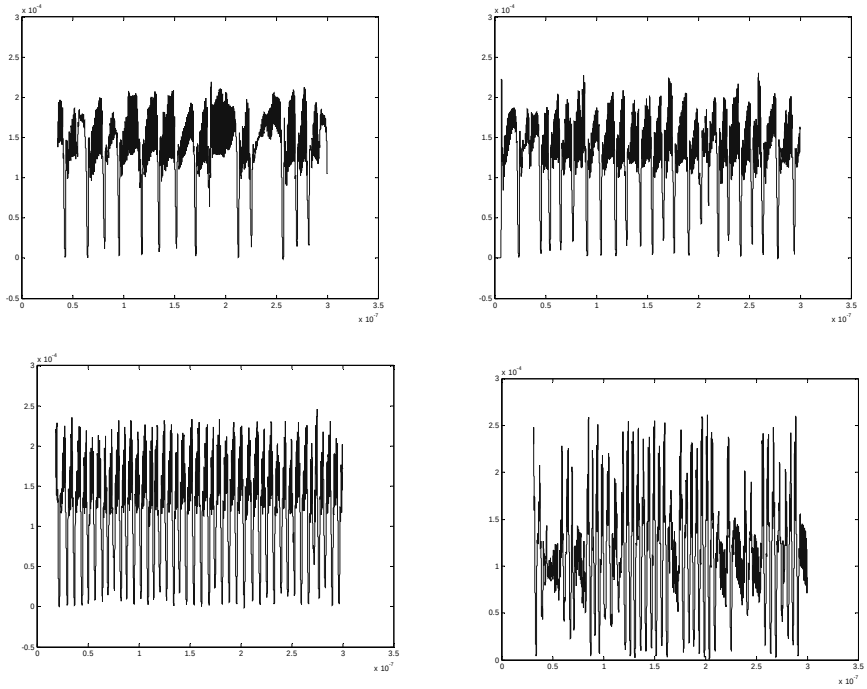


Fig. 13. Controlul evoluției haotice prin modularea electro-optică a câmpului reinjectat. Sus stânga – emisia haotică de tip fluctuații de joasă frecvență a diodei laser fără control, sus-dreapta – frecvența de control a modulatorului electro-optic este de 1e6 Hz (stare rezonată), jos-stânga – frecvența de control a modulatorului electro-optic este de 5e6 Hz (stare rezonată), şi jos-dreapta – în apropierea unei frecvențe de rezonanță, oscilatorul încercă comută din stări rezonante pe stări ne-rezonante

Foarte interesantă din punct de vedere al manifestărilor pe care le aşteptăm din partea modelului microeconomic având un număr mare de agenți, este comportarea sistemului laser multimod, de fapt un număr de oscilatori (agenți) haotici similari, acționând toți pe acelaşi sistem fizic, competitivi cuplați. În cazul funcționării sistemului în modul de LFF (sistemul prezintă modificări intermitente ale emisiei laser, cu căderi repetate dar nu strict periodice la zero) se observă (Figura 14) că toate modurile active sunt într-o stare „rerzonantă”. Ele au căderi comune la zero, dar între căderi anvelopa emisiei fiecărui mod pare că are o evoluție independentă (Figura 15).

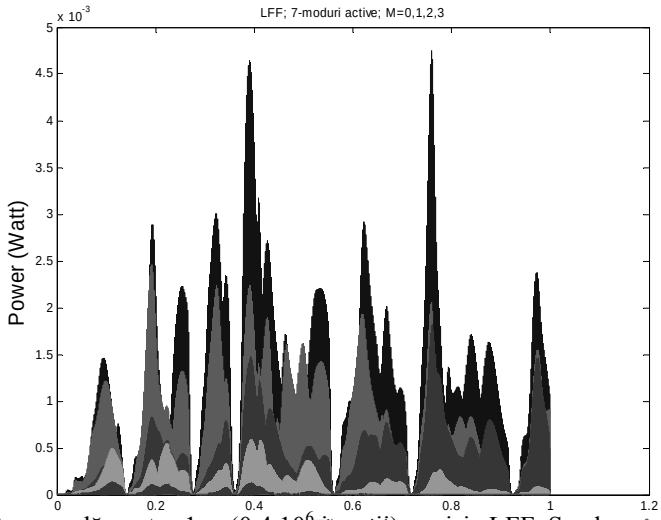


Fig. 14. Seria temporală pentru 1μs ($0.4\cdot10^{-6}$ timp(s)), emisie LFF. Se observa ca modulația de "joasa frecventa" (LFF) care apare prezentă pe toate modurile active ale laserului.

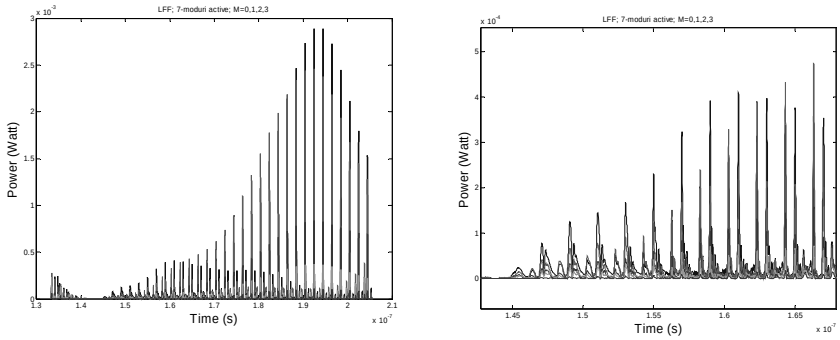


Fig. 15. Se observă modulația de "joasă frecvență" (LFF) care apare prezentă pe toate modurile active ale laserului, dar şi rezonanța modurilor în interiorul anvelopei prin pulsurile de putere corelate între moduri.

De asemenea interesantă este comportarea la scară temporală foarte mică a modurilor, ele par a fi compuse din spike-uri corelate pe toate modurile, dar de amplitudini diferite, care formează anvelopa observabilă la scară temporală mare a fluctuațiilor de joasă frecvență. Această comportare de corelare între dinamica modurilor-agenților dispare atunci când curentul de injecție creşte şi nu mai suntem în condițiile LFF, modurile având de această dată o evoluție haotică, ce pare independentă (Figura 16).

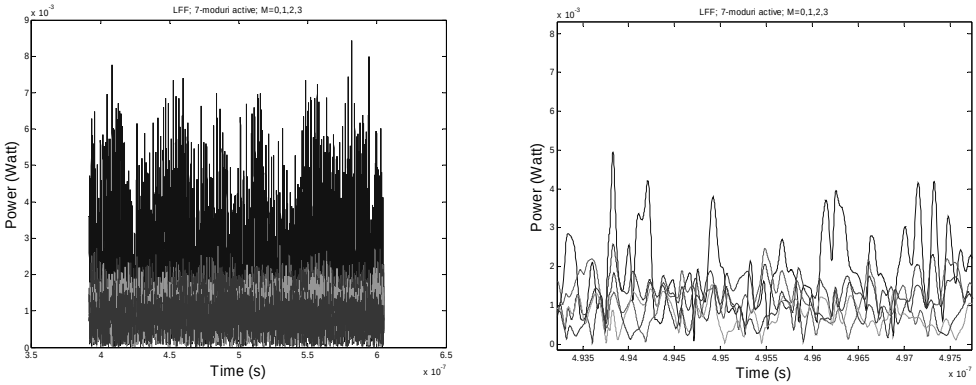


Fig. 16. Seria temporala la **I=40mA**. Se observa dispariția modulației LFF pe toate modurile active ale laserului şi lipsa corelațiilor în structura intimă a dinamicii acestor moduri.

Şi în cazul dinamicii modelului microeconomic cu un număr mare de agenți ar trebui să ne aşteptăm la manifestări similare, în anumite condiții dinamice, agenții comerciali ar trebuii să manifeste comportări inter-corelate, în care evoluțiile temporale ale fiecăruia să corespundă cu ale celorlalți, iar în cazul altor parametrii dinamici, traiectoriile temporale ale fiecărui agent ar putea să pară complet haotice şi lipsite de corelație cu ai celorlalți. Este de fapt manifestarea care se observă în realitate, unde dinamica unităților de pe o piață pare stohastică, întâmplătoare, şi corelațiile cu dinamica altor agenți este forte greu de pus în evidență.

BIBLIOGRAFIE

[1] H. Haken, Synergetics. An Introduction, Springer, Heidelberg, 1983; Advanced Synergetics, Springer Heidelberg, 1983, G.A. Cowan, D. Pines, D. Meltzer (Eds.), Complexity. Metaphors, Models, and Reality, Addison-Wesley, Santa Fe, 1994;

[2] H.W. Lorenz, Nonlinear Dynamical Equations and Chaotic Economy, Springer, Berlin, 1993;

[3] R.N. Mantegna, H.E. Stanley, Introduction to Econophysics: Correlations Complexity in Finance; Cambridge University Press, Cambridge, 1999;

[4] D. Stau_er, D. Sornette, Physica A 271 (1999) 496;

[5] Shiller, R. J. (1989) *Market Volatility* (MIT Press, Cambridge, MA);

[6] Brock, W. A. & Hommes, C. H. (1997) in *System Dynamics in Economic and Financial Model*s, eds. Heij, C., Schumacher, H. & Hanzon, B. (Wiley, New York),

[7] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1196;

[8] T. Kapitaniak, Controlling Chaos, Academic Press, New York, 1996;

[9] A. Hubler and E. Luscher, Resonant stimulation and control of nonlinear oscillators, Naturwissenschaften 76, pp. 67-69, 1989.

[10] Janusz A. Holyst, Krzysztof Urbanowicz, Chaos control in economical model by time-delayed feedback method, Physica A 287 (2000) 587;

[11] T. Kapitaniak, Controlling Chaos, Academic Press, New York, 1996;

[12] J.A. Ho lyst, T. Hagel, G. Haag, Chaos, Solitons Fractals 8 (1997) 1489;

[13] K. Pyragas, Phys. Lett. A 170 (1992) 421;

[14] W. Just, E. Reibold, K. Kacperski, P. Fronczak, J.A. Ho lyst, H. Benner, Phys. Rev. E 61 (2000) 5045;

[15] G. Chen, J. Lu, B. Nicholas, S.M. Ranganathan, Int. J. Bifurc. Chaos 9 (1999) 287;

[16] G. Feichtinger, in: G. Haag, U. Mueller, K.G. Troitzsch (Eds.), Economic Evolution and Demographic Change, Springer, Berlin, 1992;

[17] D. Wolf, J. B. Swift, Physica D 16, 285-317 (1985);

[18] M.T. Rosenstein, J. J. Collins,, Physica D 65, pp117-134 (1993);

[19] M. Bulinski, M. L. Pascu, *Chaos in laser diode light emission*, Romanian Journal of Optoelectronics, Vol9, Nr.2, pp.1-34 (2001);

[20] M.Bulinski, M.L.Pascu, I.R. Andrei**,** "Phase Synchronization and Coding Chaos with Semiconductors Lasers", *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*-INOE, vol.6, No. 1, March 2004, p. 77-86.

[21] M. Bulinski, C. Costea, I.R.Andrei, „The numerical modeling of data coding transmission between two multi-mod laser diodes operating with external cavity", Sesiunea Anuala a Facultatii de Fizica, Universitatea din Bucuresti, 27 Mai 2005, Bucuresti – Romania.

[22] R. Lang, K. Kobayashi, IEEE J. QE-**16**, 3, 347 (1980).

[23] Jasper Mork, Bjarne Tromborg, Peter L. Christiansen, IEEE Vol. 24, N0.2, pp123-133 (1988)

[24] F. Rogister, M. Sciamanna, A. Locquet, P. Mégret, O. Deparis, M. Blondel, *Dynamical behavior of a multimode semiconductor laser subject to a single mode selective optical feedback*, Conference on Laser and Electro-Optics *(CLEO) Pacific Rim*, vol. 2, pp. 170-171, Chiba (J), 15/07-19/07, 2001.